複素解析

L. V. アールフォルス 著／笠原乾吉 訳

現代数学社

Lars V. Ahlfors

COMPLEX ANALYSIS. 3/e

初版（1953年）の序文

アメリカの大学では，この本のおおよその内容を扱う課程は，大学院１年におかれるのが普通である．その扱い方は広くさまざまである．ある大学では古典的な関数論の必須な要旨を教えることに重きをおき，他の大学では学生がはじめて数学的厳密さに直面する科目に用いられる．例えば，ハーバードでは，微積分学を全く厳密に見直す目的にも，この課程は用いられている．

著者の抱負は，簡潔であり同時に厳密であり，教えることに使用でき自分で読むことも可能な教科書を書くことであった．そのような目標は到達不可能で近づくことができるだけであり，著者は多くの欠点を承知している．この本を予備知識の不要なものにしようとは試みなかった．そうではなく，実数と定積分の定義・性質を含む微積分学の基礎的知識は知っているものとする．極限と連続性に関しては複素数への応用と関連して復習することにし，初等教育において不注意または不十分な方法で導かれている諸結果には頼らないように努力する．もし教師が実数または積分の定義をその課程に含めることにきめたときには，信頼できる参考書が１ダースやそこらはあるであろう．著者はこれらの話題をこの本の紙数をふやさないために省くことにした．

出発点のほかに，教科書の作者は何を含め何を省くかを決めるという困難な問題に直面する．この本では，古典的な複素関数論を支えている一般的な原理を強調することにより，読者に関数論の確実な基礎を与えたいと思う．基本的な方法を徹底的に教えられた人は，関数論の特殊な問題に取り組もうとするときに，新しい困難にぶつかることはないと著者は信じる．それでもやはり，例えば楕円関数の話を省いたのは非常に残念である．その一つの主な理由は，E.T. Copson の本（*An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*，ロンドン，1935年）にあるきれいな取り扱いを改良することがほとんどできなかったからである．

逆の方向であるが，初等関数論の一部とは普通思えない話題もいくつか含ませた．劣調和関数の話やディリクレ問題を解くペロンの方法などがそうであり，それらは重要であるとともに確かに初等的でもある．

この本は複素数についての初等的な議論から始まり，多価解析関数の理論についての常識的な注意で終る．その間の進行はゆるやかである．尊敬する恩師 Ernst Lindelöf から著者は，学生が解析関数の写像としての性質に十分なれるまで複素積分の使用をあとに延ばすことを学んだ．幾何学的に視覚化することは，教訓的な道具としての価値に疑いをさしはさむことはできないが，それだけでなく知識の根源なのである．

そのほかに多くの方々に御礼をのべたい．例えば，Carathéodory の本「関数論」の出版は，そのときにこの本の原稿は半ばできあがっていたが，その最終的な形にもちろん影響せずにはいなかった．なかんずく，ホモロジー論を回転数の概念に基づいて作るという E. Artin のすばらしい考えを，重要な変更なしにとりいれた．これにより，位相についての議論を最小にして，コーシーの定理の完全で厳密な証明とその直接の応用をすべてなすことができた．もちろん，位相をさけること自体には利益はないが，しかし，関数論の本では，解析関数の学習に真に必要な位相の部分に集中することが，非常に望ましい．同じ理由からジョルダンの曲線定理の証明は省いた．著者の知るかぎりでは，関数論においてそれが必要になることはない．

この本の練習問題は見本とみてほしい．もっと多くのそしてもっと良い問題を作ることから，教師を救済する気持はもっていない．どんな方法で練習させるか，どんな別証明を学生に求めるか，どんな創意工夫を示す機会を学生に与えるのか，それを決めるのは教師である．教科書は詳細な計画をあらかじめ作りあげる必要を省く教師の道案内にすぎず，教室での日常の接触が教師をして，何をつけ加え何を省くかの唯一の権威としているのである．

もう1点：明らかに，明白に，容易になどの言葉をずうずうしく沢山用いた．それは，状況をぼんやりさせるために用いているのではない．逆に，それは読者の理解をためしているのであり，省略された理由が明白に容易に納得できないならば，少し手前までもどりそこから新しく出なおした方がよいであろう．容易に見抜けると思うが，意識的に欠陥のあるままにした所が少しある．それは，非建設的で無味乾燥な推論の頁をいくぶん省くのに役立っている．

Lars V. Ahlfors

第二版（1966年）の序文

この教科書は，一変数解析関数論の初等程度の厳密な入門書である．アメリカの大学では，大学院の一年生か学部の上級生に用いてもらうつもりである．

初版が出版されてからのちに，アメリカの数学の学生の質に著しい変化がおきた．彼等はより良い準備をして大学に入り，早い段階で真の数学的推論に直面している．これほどではないが，外国でも同様のことがいえる．

この第二版を準備するにあたって，読者のこの大きな成熟に合わせるように努力した．同時に，説明の本質的に初等的な特色を犠牲にしないようにした．実際，もっともよくできる学生だけを相手にしても何もうる所はないであろう．したがって，初版と同様に，既知事項の簡約された復習を除いて，最初は表現はかなりゆったりとしたものとし，徐徐に簡潔さの程度を高めていく．そして，問題を特徴づける本質的なものを読者に気づかせるために，思考の節約を強調することを試みた．

初版と異なる主な所を列挙しよう：

1．指数関数と三角関数を整級数によって定義した．そうするために，複素整級数に関する節が早く必要になった．この方法は，それ自身教訓的価値がないわけではない．

2．点集合の位相の入門の所は書き直した．今度は距離空間の基本的性質を含み，コンパクト性の議論をよりくわしくした．

3．正規族はもっと直接的な方法で扱い，コンパクトとの関係を強調した．

4．リーマンの写像定理は，シュヴァルツ・クリストッフェルの公式の節と結びつけた．

5．楕円関数に関する短い章をつけ加えた．専門家にのみ必要な記号の慣習的紛糾に，読者をわずらわせないように慎重に努力を集中した．

6．練習問題は充実させた．沢山のヒントをつけた星印の問題もあり，これは本文の一部とみなされる．学生は完全な証明を作りあげるようにがんばってほしい．

この機会に再び，故 Ernst Lindelöf 先生の御恩を偲びたい．この本の全体の構成は，回転数の初等的ホモロジーにもとずく Emil Artin の考えに深く影響されている．

初版の誤りを指摘された多くの数学者に感謝する．新しい誤りが忍びこんでいないという偽善的な希望をのべるだけである．

Lars V. Ahlfors

第三版（1979年）の序文

この本は複素１変数関数論の標準的な教科書としての地位を首尾よく保ってきた．にもかかわらず，現代数学用語の変化や学生の準備と目的の差などのために，版を新しくする必要が生じた．

この新版には根本的な改変はない．著者は幾何学的方法が根本であると強く現在も信じている．この理由から，最初の入門的ないくつかの章にほとんど変更はない．全体を通して少数の箇所で，誤解や困難の原因となっていることが経験からわかった点を理解しやすくすることにした．気がついたミスプリントと少しの誤りも訂正した．その他の第二版と第三版の主な違いをまとめると次のようになる：

1．記号と用語を現代化した．しかし，スタイルに重大な変更をする必要は認めなかった．

2．第３章に等角写像による弧長と面積の変換を扱う短い節をいれた．これは２重積分の定義と操作について微積分法に頼ることになるので，他の準備不要な解説とある程度違背している．この不利益はたいしたことはない．

3．第４章で，コーシーの定理の一般な形のより簡単な証明を新しくいれた．それは A.F. Beardon によるもので，彼はそれをいれることを許してくれた．これは補足であり，前の証明におきかえられるものではない．以前の証明は存続され改良されている．

4．リーマンのゼータ関数の短い節が入った．これはいつでも学生を魅惑するものであり，関数等式の証明は単なる定積分の計算以外に留数を使用する例となる．

5．第８章の多くの部分は完全に書き直した．主たる目的は，すべての古典的な概念を強調すると同時に，読者に芽と層の用語を紹介することである．基礎的な概念以上の層の理論が，この本の初等的な性格と合わないことは言うまでもない．

6．１次元複素多様体としてのリーマン面を含めるという誘惑を，著者は

やっと退けた．平面での複素関数論の基本的な方法と結果への入門だけという目的をこえていたら，この本の有用性の多くは失われたであろう．

第二版のミスプリントや弱点や誤りを指摘して下さった多くの方々にお礼をのべたい．私の本にもとづく新しい課程への学生の反応を教えて下さった同僚 Lynn Loomis にも感謝する．

Lars V. Ahlfors

も　く　じ

第1章　複　素　数

1．複素数の代数

四則演算に関して実数と複素数が同じ基本法則にしたがうということが重要である．この類似を強調し補完することから，複素関数論の学習を始めよう．

1.1．四則演算　初等代数により，読者は $i^2=-1$ をみたす**虚数単位** i を知っているだろう．虚数単位を2つの実数 α, β と加法乗法で結びつけて，**複素数** $\alpha+i\beta$ をうる．α を複素数の**実部**，β をその**虚部**という．$\alpha=0$ ならそれは**純虚数**とよばれる；$\beta=0$ ならもちろんそれは実数である．同時に実数でもあり純虚数でもある数は0だけである．2つの複素数が等しいのは，それらが同じ実部と同じ虚部をもつとき，そのときだけと約束する．

複素数は加法と乗法で閉じている．普通の計算規則を複素数に適用してよいと仮定し，

$$(\alpha+i\beta)+(\gamma+i\delta)=(\alpha+\gamma)+i(\beta+\delta), \tag{1}$$

$$(\alpha+i\beta)(\gamma+i\delta)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+i(\alpha\delta+\beta\gamma) \tag{2}$$

とする．後者では $i^2=-1$ を用いた．

除法が可能なことはそれほど明らかではない．$\gamma+i\delta\neq 0$ と仮定して，$(\alpha+i\beta)/(\gamma+i\delta)$ が複素数になることを示そう．商を $x+iy$ とおくと，

$$\alpha+i\beta=(\gamma+i\delta)(x+iy)$$

とならねばならぬ．(2)によりこれをかきなおすと，

$$\alpha+i\beta=(\gamma x-\delta y)+i(\delta x+\gamma y)$$

となり，2つの方程式

$$\alpha=\gamma x-\delta y$$

$$\beta=\delta x+\gamma y$$

をうる．この連立一次方程式は，$\gamma^2+\delta^2$ が0でないと仮定しているから，ただ一つの解

$$x=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}$$

$$y=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}$$

をもつ．これから

$$\frac{\alpha+i\beta}{\gamma+i\delta}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+i\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2} \tag{3}$$

をうる．

商の存在がわかってしまえば，その値を計算するには簡単な方法がある．分母と分子に $\gamma-i\delta$ をかけて，直ちに

$$\frac{\alpha+i\beta}{\gamma+i\delta}=\frac{(\alpha+i\beta)(\gamma-i\delta)}{(\gamma+i\delta)(\gamma-i\delta)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+i(\beta\gamma-\alpha\delta)}{\gamma^2+\delta^2}$$

となる．特別な場合として，0でない複素数の逆数は

$$\frac{1}{\alpha+i\beta}=\frac{\alpha-i\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

である．

i^n は，4つの値 $1, i, -1, -i$ しかとらない．これはそれぞれ，n を4で割った余りが 0，1，2，3 のときに対応している．

問　題

1. 次の値を求めよ．

(i) $(1+2i)^3$,　(ii) $\dfrac{5}{-3+4i}$,　(iii) $\left(\dfrac{2+i}{3-2i}\right)^2$,　(iv) $(1+i)^n+(1-i)^n$.

2. $z=x+iy$ (x, y は実数)として，次の複素数の実部，虚部を求めよ．

(i) z^4,　(ii) $\dfrac{1}{z}$,　(iii) $\dfrac{z-1}{z+1}$,　(iv) $\dfrac{1}{z^2}$.

3. 次の式を証明せよ．(符号は，すべての組合わせを考えよ．)

$$\left(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3=1,\quad \left(\frac{\pm 1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)^6=1.$$

1.2. 平方根　複素数の平方根は具体的に計算できることを示そう．与えられた複素数を $\alpha+i\beta$ として

$$(x+iy)^2=\alpha+i\beta$$

をみたす複素数 $x+iy$ を探す．この式は連立方程式

$$(4)\qquad \begin{aligned} x^2-y^2&=\alpha \\ 2xy&=\beta \end{aligned}$$

と同値である．この連立方程式から

$$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=\alpha^2+\beta^2$$

をうる．ゆえに

$$x^2+y^2=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

となる．ここで，この平方根は正数か 0 である．(4) の最初の式といっしょにして

$$(5)\qquad \begin{aligned} x^2&=\frac{1}{2}(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}) \\ y^2&=\frac{1}{2}(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}) \end{aligned}$$

がわかる．この式の右辺は，α の符号のいかんにかかわらず，正数か 0 になることに注意する．

一般には，(5)から x の値が 2 つ，y の値が 2 つえられる．しかし，その組合わせは自由ではない．何故なら，(4)の第 2 の式は(5)からはえられないからである．したがって，x と y はその積が β と同符号になるように注意して選ばねばならない．$\beta\neq 0$ のとき，一般解として

$$(6)\qquad \sqrt{\alpha+i\beta}=\pm\left(\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}+i\frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right)$$

をうる．$\beta=0$ のときには，この値は $\alpha\geqq 0$ なら $\pm\sqrt{\alpha}$，$\alpha<0$ ならば $\pm i\sqrt{-\alpha}$ である．ここで，正数の $\sqrt{}$ は正の符号をとることとしている．

任意の複素数には平方根が存在して，それは符号が反対の 2 数であることがわかった．その 2 数が一致するのは $\alpha+i\beta=0$ のときだけである．平方根が実数になるのは $\beta=0$, $\alpha\geqq 0$ のとき，純虚数になるのは $\beta=0$, $\alpha\leqq 0$ のときだけである．いいかえると，0 は例外として，正数だけが実数の平方根をもち負数だけが純虚数の平方根をもつのである．

平方根は一般には複素数だから，2 つの平方根を正の平方根とか負の平方

根とか区別するわけにはいかぬ．もちろん，(6) において＋をとるもの－をとるものと区別することはできるけれども，その区別は不自然であって避けるべきである．正しい道は，二つの平方根を対称的な方法で扱うことである．

問　題

1. 計算せよ．

 (i) $\sqrt{i}$,　(ii) $\sqrt{-i}$,　(iii) $\sqrt{1+i}$,　(iv) $\sqrt{\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}}$.

2. $\sqrt[4]{-1}$ の4つの値を求めよ．
3. $\sqrt[4]{i}$ と $\sqrt[4]{-i}$ を計算せよ．
4. 次の2次方程式をとけ：
 $z^2+(\alpha+i\beta)z+\gamma+i\delta=0.$

1.3. 正当化　これまでの複素数の導入の方法はまったく無批判的であった．その中で方程式 $x^2+1=0$ が解をもち，計算の規則がすべて成り立つような数の集合が，はたして存在するかどうかは問題である．

実数の集合(それを $\boldsymbol{R}$ とかく)を特徴づける性質を復習することから始めよう．それはまず，**体**である[†]．つまり，加法と乗法が定義されていて，結合法則，交換法則，分配法則をみたす．加法と乗法の単位元 0，1 があり，任意の α に対し $\alpha+0=0$, $\alpha\cdot 1=\alpha$ である．さらに，減法の式 $\beta+x=\alpha$ はいつも解をもち，除法の式 $\beta\cdot x=\alpha$ は $\beta\neq 0$ ならばつねに解をもつ．

簡単な方法で，単位元はただ一つであることがわかり，減法や除法の結果もただ一つであることが示される．また，体はいつでも整域である：すなわち，$\alpha\beta=0$ となるのは $\alpha=0$ かまたは $\beta=0$ のとき，そのときだけである．

これらの性質は任意の体に共通である．体 $\boldsymbol{R}$ はさらに**順序関係** $\alpha<\beta$ (または $\beta>\alpha$) をもつ．それは容易に，正の実数の集合 $\boldsymbol{R}^+$ によって，$\alpha<\beta$ とは $\beta-\alpha\in\boldsymbol{R}^+$ のことと定義される．集合 $\boldsymbol{R}^+$ は次の3つの条件で特徴づけられる：(i) 0 は正数ではない；(ii) $\alpha\neq 0$ ならば，α か $-\alpha$ の一方は，

[†]) 読者は代数学の基礎的な知識をもっていると仮定する．体の定義をこれから完全にのべるけれども，その概念をぼんやりとでも知っている学生でなければ，よくはわからないだろう．(以下，訳注) しかし，この仮定はこの節だけで，読者は気にしなくてよい．

そして一方だけが正数である；(iii) 2つの正数の和および積はまた正数である．この条件から，不等式の取扱いに対する通常の規則はすべて導かれる．とくに，平方数 α^2 は正か零であることがわかり，ゆえに，$1=1^2$ は正数である．

順序関係のおかげで，1，1+1，1+1+1，… という和はみんな相異る．ゆえに，$\boldsymbol{R}$ は自然数を含み，それは体であるから有理数全部からなる部分体を含むことになる．

最後に，$\boldsymbol{R}$ は次の**完備性**をみたす：単調増加で有界な実数列は極限をもつ．$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\cdots<\alpha_n<\cdots$ とし，すべての n に対し $\alpha_n<\beta$ をみたす実数 β の存在を仮定しよう．完備性はこのとき次のような数 $A=\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ が存在することを保証する：任意に $\varepsilon>0$ を与えると，自然数 n_0 を，すべての $n>n_0$ に対し $A-\varepsilon<\alpha_n<A$ が成り立つように，とれる．

公理として要請したこれらの性質をみたす集合 $\boldsymbol{R}$ の存在と一意性(同型写像[†]の意味で) を証明していないから，実数に対するわれわれの議論は不完全である．実数を導入する構成方法はいくつかあるが，そのどれをもよく知らない学生は，実数を公理的に扱っている教科書をみて，このギャップをうめることを怠ってはいけない．

α が実数なら α^2+1 は正だから，$\boldsymbol{R}$ において方程式 $x^2+1=0$ は解をもたない．$\boldsymbol{R}$ を部分体として含みそこで $x^2+1=0$ が解をもつような体 $\boldsymbol{F}$ があると仮定しよう．$x^2+1=0$ の一つの解を i とかく．$x^2+1=(x+i)(x-i)$ だから，$x^2+1=0$ は $\boldsymbol{F}$ の中でちょうど二つの解をもち，i と $-i$ である．実数 α, β によって $\alpha+i\beta$ と表わせる $\boldsymbol{F}$ の元の全体を，$\boldsymbol{C}$ とかく．この表現は一意的である；何故なら，$\alpha+i\beta=\alpha'+i\beta'$ なら $\alpha-\alpha'=-i(\beta-\beta')$ となり，ゆえに $(\alpha-\alpha')^2=-(\beta-\beta')^2$ となり，これは $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$ のときだけ成立する．

部分集合 $\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{F}$ の部分体である．実際，ささいな検証すべき点を除いて

---

†) 2つの体の間の同型(写像)とは，和と積を保つ1対1対応のことである．同型という言葉は，与えられた文脈で重要と考えられるすべての関係を保つような1対1対応を示すのに，いろいろ一般に用いられる．

(それは読者にまかす)，これはまさに1.1節で示したことである．さらに，$\boldsymbol{C}$ の構造は $\boldsymbol{F}$ のとり方によらない．$\boldsymbol{F}'$ を，$\boldsymbol{R}$ と $x^2+1=0$ の根 i' を含む別の体とし，対応する集合 $\boldsymbol{C}'$ を $\alpha+i'\beta$ の形の元の全体としよう．$\alpha+i\beta$ に $\alpha+i'\beta$ を対応させて $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{C}'$ の1対1対応をうるが，これは明らかに体の同型写像である．ゆえに，$\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{C}'$ が同型であることが証明された．

任意に与えられた $\boldsymbol{F}$ のこの部分体 $\boldsymbol{C}$ を**複素数体**と定義する．$\boldsymbol{F}$ のとり方によらないことは示したが，要求された性質をもつ体 $\boldsymbol{F}$ の存在はまだ示していない．この定義が意味をもつためには，$\boldsymbol{R}$ (または $\boldsymbol{R}$ に同型な部分体) を含み $x^2+1=0$ がそこで解をもつような体 $\boldsymbol{F}$ を提示することが残っている．

そのような体を構成する方法はいろいろある．もっとも簡単で直接的な方法は次のやり方である：α, β を実数とし，$+$ と i は純粋な記号とみて，$\alpha+i\beta$ という形で表現されるものの全体を考える (ここではまだ $+$ は加法を意味せず，i は体の元ではない)．この表現が体 $\boldsymbol{F}$ の元で，加法と乗法は1ページの (1) と (2) で定義する．(記号 $+$ が二つの違った意味で使われていることに注意せよ)．$\alpha+i0$ の形の元の全体が $\boldsymbol{R}$ に同型な部分体となる．$0+i1$ は方程式 $x^2+1=0$ をみたす；実際，$(0+i1)^2=-(1+i0)$ だからである．ゆえに，この体 $\boldsymbol{F}$ は要求された性質をもっている．さらにこの場合は，$\boldsymbol{F}$ は対応する部分体 $\boldsymbol{C}$ と一致している．何故なら

$$\alpha+i\beta=(\alpha+i0)+(\beta+i0)(0+i1)$$

とかけるからである．これで複素数体の存在は証明され，$+$ は $\boldsymbol{C}$ における加法を意味し i は $x^2+1=0$ の根であるとして，簡単な表示法 $\alpha+i\beta$ にもどることができる．

問　題 (代数の知識をもつ学生へ)．

1. α, β を実数として，次の形の行列の全体を考える：

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

これは行列の加法と乗法により体となり，複素数体と同型であることを示せ．

2. 複素数体は，実数係数の多項式全体を既約多項式 x^2+1 を法として考えた体とみれることを示せ．

1.4. 共役複素数，絶対値　複素数を，一つの文字 a でかき体 $\boldsymbol{C}$ の一つの元を表すか，または実数 α, β により $\alpha+i\beta$ という形でかく．ほかに標準的には $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$, $w=u+iv$ などと表し，このときには暗黙のうちに x, y, ξ, η, u, v は実数であると了解する．複素数 a の実部，虚部はまた $\mathrm{Re}\, a$, $\mathrm{Im}\, a$ とかく．

複素数の加法乗法の規則を導くのに，$i^2=-1$ ということだけを用いた．$-i$ もこの同じ性質をみたすから，すべての規則は i をいたるところ $-i$ でおきかえても成り立つはずである．直接に検証してみれば実際そうなっていることがわかる．$\alpha+i\beta$ を $\alpha-i\beta$ におきかえる変換を**複素共役**という．$\alpha-i\beta$ を $\alpha+i\beta$ の**共役複素数**という．a の共役複素数を $\bar{a}$ とかく．複素数 a が実数になるための必要十分条件は $a=\bar{a}$ である．複素共役は対合的変換である:これは，$\bar{\bar{a}}=a$ という意味である．

実部と虚部は複素数とその共役を用いて

$$\mathrm{Re}\, a=\frac{a+\bar{a}}{2}, \quad \mathrm{Im}\, a=\frac{a-\bar{a}}{2i}$$

と表される．したがって，a と $\bar{a}$ を組織的に用いれば，実部虚部に別の文字を用いる必要はない．しかし，両方の表し方を自由に用いるのが便利である．

複素共役の基本的性質はすでにのべたこと，すなわち

$$\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b},$$
$$\overline{ab}=\bar{a}\bar{b}$$

である．商に対しても同様の結果をうる：$ax=b$ ならば $\bar{a}\bar{x}=\bar{b}$ で，ゆえに $\overline{(b/a)}=\bar{b}/\bar{a}$ である．もっと一般に，$R(a, b, c, \cdots)$ を，複素数 $a, b, c, \cdots$ に加減乗除をほどこしてえられる有理式とする．そのとき，

$$\overline{R(a, b, c, \cdots)}=R(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \cdots)$$

が成り立つ．応用として，方程式

$$c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n=0$$

を考えよう．ζ がこの方程式の根ならば，$\bar{\zeta}$ は方程式

$$\bar{c}_0 z^n + \bar{c}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{c}_{n-1} z + \bar{c}_n = 0$$

の根である．とくに係数がすべて実数ならば，$\bar{\zeta}$ と ζ は同じ方程式の根であり，これから，実数係数の方程式の実数でない根は，共役な根の対としてあらわれるという，よく知られた定理がえられた．

積 $a\bar{a} = \alpha^2 + \beta^2$ はつねに正か零である．その正の平方根を，**複素数** a **の絶対値**といい $|a|$ とかく．この言葉と記号に問題はない．というのは，実数のこの意味の絶対値も，符号をとった数値に正の符号をつけたものになっている．

定義をくり返すと

$$a\bar{a} = |a|^2$$

で $|a| \geqq 0$ であり，これから $|\bar{a}| = |a|$ がわかる．積の絶対値に対しては，

$$|ab|^2 = ab \cdot \overline{ab} = ab\,\bar{a}\bar{b} = a\bar{a}\,b\bar{b} = |a|^2|b|^2$$

となり，$|ab|$ も $|a||b|$ も正であるから

$$|ab| = |a||b|$$

をうる．言葉でいうと，2数の積の絶対値は各々の絶対値の積に等しい．

この性質が任意個数の積に拡張できることは明らかである：

$$|a_1 a_2 \cdots a_n| = |a_1||a_2| \cdots |a_n|.$$

商 a/b, $b \neq 0$ は $b(a/b) = a$ をみたし，ゆえに $|b| \cdot |a/b| = |a|$ で，

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

をうる．

和の絶対値に関する公式は簡単ではない．

$$|a+b|^2 = (a+b)(\bar{a}+\bar{b}) = a\bar{a} + (a\bar{b} + b\bar{a}) + b\bar{b}$$

となり，これはまた次のようにかける：

$$(7) \qquad |a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,a\bar{b}.$$

差に対する公式は

$$(7') \qquad |a-b|^2=|a|^2+|b|^2-2\,\mathrm{Re}\,a\bar{b}$$

となり，両者を加えて次の等式をうる：

$$(8) \qquad |a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2).$$

問　題

1. z を $x+iy$ としたときと $x-iy$ としたときの

$$\frac{z}{z^2+1}$$

の値を計算し，両者が共役であることをたしかめよ．

2. 絶対値を求めよ．

$$-2i(3+i)(2+4i)(1+i), \qquad \frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}.$$

3. $|a|=1$ かまたは $|b|=1$ のときに

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=1$$

となることを証明せよ．$|a|=|b|=1$ のときにはどんな例外が起るか．

4. z を複素数の未知数として，方程式 $az+b\bar{z}+c=0$ がただ一つの解をもつための条件を求めよ．また，そのときの解を求めよ．

5. 次の複素数の形での，ラグランジュの等式を証明せよ：

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2-\sum_{1\leqq i<j\leqq n}|a_i\bar{b}_j-a_j\bar{b}_i|^2.$$

1.5. 不等式

つねに用いられる重要な不等式をいくつか証明する．複素数には大小関係がないので，不等式はすべて実数の間のものでなければならない．これは指摘しておいた方がよいだろう．

絶対値の定義から，不等式

$$(9) \qquad \begin{aligned} -|a|&\leqq \mathrm{Re}\,a\leqq|a|, \\ -|a|&\leqq \mathrm{Im}\,a\leqq|a| \end{aligned}$$

が導かれる．等式 $\mathrm{Re}\,a=|a|$ が成り立つのは a が実数で $\geqq 0$ のとき，そのときだけである．

(9)を(7)に用いて，

$$|a+b|^2 \leqq (|a|+|b|)^2$$

となり，ゆえに

(10)
$$|a+b| \leqq |a|+|b|$$

をうる．これは**三角不等式**とよばれるが，その理由はのちに明らかになる．帰納法により，

(11)
$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leqq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

と拡張できる．すなわち，和の絶対値は各項の絶対値の和以下である．

読者は実数の場合に不等式(11)がいかに重要かよく知っていると思うが，複素数の理論においてもそれに劣らず重要なことがわかるだろう．

(11)で等号の成立する場合をすべてみておく．(10)で等号がなりたつためには $a\bar{b} \geqq 0$ が必要十分である．($c>0$ とは，c が実数で正であることを意味する．このようにしておくと便利である．) $b \neq 0$ ならこの条件は $|b|^2(a/b) \geqq 0$ とかきなおされ，ゆえに $a/b \geqq 0$ と同値である．一般のときには次のようにする：(11)において等号が成立したとしよう；すると，

$$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n| = |(a_1+a_2)+a_3+\cdots+a_n|$$
$$\leqq |a_1+a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n| \leqq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

となる．ゆえに，$|a_1+a_2|=|a_1|+|a_2|$ となり，$a_2 \neq 0$ ならば $a_1/a_2 \geqq 0$ をうる．項の番号は今の議論でかえても同じだから，任意の 0 でない 2 項の比は正でなければならぬことがわかった．逆に，この条件がみたされていると仮定しよう．$a_1 \neq 0$ とすると，

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| = |a_1|\cdot\left|1+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}\right|$$
$$= |a_1|\left(1+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}\right) = |a_1|\left(1+\frac{|a_2|}{|a_1|}+\cdots+\frac{|a_n|}{|a_1|}\right)$$
$$= |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

となる．結論をまとめよう：(11)において等号が成り立つための必要十分条件は，任意の 0 でない 2 項の比が正になることである．

(10)より

$$|a|=|(a-b)+b|\leqq|a-b|+|b|$$

となり，次の不等式をうる：

$$|a|-|b|\leqq|a-b|.$$

同様にして，$|b|-|a|\leqq|a-b|$ もえられ，2つを合わせて次の不等式をうる：

(12)
$$|a-b|\geqq||a|-|b||.$$

もちろん，同じ評価は $|a+b|$ に対してもえられ，$|a+b|\geqq||a|-|b||$ である．

(10)の特別な場合として

(13)
$$|\alpha+i\beta|\leqq|\alpha|+|\beta|$$

がえられる．つまり，複素数の絶対値は，その実部，虚部の絶対値の和以下である．

これらのほかに証明がそれほど簡単でない多くの不等式がしばしば用いられる．その中で第一番にくるのは次の**コーシーの不等式**である：

$$|a_1b_1+\cdots a_nb_n|^2\leqq(|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2)(|b_1|^2+\cdots+|b_n|^2).$$

あるいは，簡単にかくと，次のようになる：

(14)
$$|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i|^2\leqq\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2.$$ [†]

証明するために，λ を任意の複素数とする．(7)から，

(15)
$$\sum_{i=1}^{n}|a_i-\lambda\bar{b}_i|^2=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2+|\lambda|^2\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2-2\,\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

をうる．これはすべての λ に対し $\geqq0$ である．とくに，

$$\lambda=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i}{\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2}$$

にとる．（もし分母が0なら始めから証明することはないから，分母は0で

[†] i は和をとる番号としては使い易く，下つきの添字だから虚数単位の i と間違えることはない．番号としての i の使用を禁止しても無意味だろう．

ないとしてよい)．勝手にこのようにとったのではなく，(15) 式の値が最小になるような λ をかいたのである．(15)に代入して簡単にすると，

$$\sum_1^n |a_i|^2 - \frac{|\sum_1^n a_i b_i|^2}{\sum_1^n |b_i|^2} \geqq 0$$

がえられ，これは(14)と同じである．

さらに (15) から，(14) で等号が成立するための必要十分条件は，a_i が $\bar{b}_i$ に比例すること(つまり，ある λ が存在し $a_1 = \lambda \bar{b}_1, \cdots, a_n = \lambda \bar{b}_n$ となること)である．

コーシーの不等式は，別にラグランジュの等式(1.4節 問題５)からも証明できる．

問　題

1. $|a|<1,\ |b|<1$ のとき，次の不等式を証明せよ：

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1.$$

2. コーシーの不等式を帰納法により証明せよ．
3. $i=1, 2, \cdots, n$ に対し $|a_i|<1,\ \lambda_i \geqq 0$ で $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$ のとき，次の不等式を証明せよ：

$$|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n| < 1.$$

4. $|z-a|+|z+a|=2|c|$ をみたす複素数 z が存在するための必要十分条件は，$|a| \leqq |c|$ であることを示せ．この条件がみたされているとき，$|z|$ の最小値，最大値は何か．

2．複素数の幾何学的表示

平面に直交座標系を与えて，複素数 $a=\alpha+i\beta$ を座標 (α, β) の点で表す．この表現はいつも用いられて，しばしば複素数 a を**点** a という．第一座標軸(x 軸)を**実軸**といい，第二座標軸(y 軸)を**虚軸**という．平面自身も**複素平面**とよばれる．

幾何学的表示は，幾何学的用語を用いることにより鮮明な映像を心の中に

やきつけるから，有用である．しかし，解析学の結論はすべて実数の性質からひきだされるべきであって，幾何学の公理からではないという見解を，われわれはとる．この理由から，われわれは説明の目的にだけ幾何学を用い，解析学的に間をうめることが自明なときは別として，厳密な証明には幾何学を用いない．この姿勢によって幾何学的考察にともなうあいまいさから救われる．

2.1. 加法と乗法の幾何的学説明　複素数の加法はベクトルの加法として視覚化できる．このために，複素数は点として表されるばかりでなく，原点からその点へ向うベクトルとしても表すことにする．数，点，ベクトルのいずれも同じ文字 a で表す．平行移動によって重なり合うベクトルは等しいとみなす．

第２のベクトル b を，その始点が a の終点と一致するようにおく．そのとき，$a+b$ は a の始点から b の終点へ向うベクトルによって表される．差 $b-a$ を作るのには，ベクトル a, b を同じ点を始点にかく；そのとき，$b-a$ は a の終点から b の終点へ向う．$a+b$ と $a-b$ は，a, b を辺とする平行四辺形の対角線になることをみてほしい．(図1-1)．

ベクトルの表示がさらに有用なのは，ベクトル a の長さが $|a|$ に等しいことである．ゆえに，点 a と点 b との距離は $|a-b|$ である．こう解釈すると，三角不等式 $|a+b|\leqq|a|+|b|$ と等式 $|a+b|^2+|a-b|^2=2\,(|a|^2+|b|^2)$ はよく知られた幾何学の定理となる．

点 a とその複素共役 $\bar{a}$ とは実軸に関して対称の位置にある．a の虚軸に関する対称点は $-\bar{a}$ である．４点 $a, -\bar{a}, -a, \bar{a}$ は両軸に関し対称な正方形の頂点になっている．

２複素数の積の幾何学的解釈を導くために極座標を導入する．点 (α, β) の極座標が (r, φ) ということは，

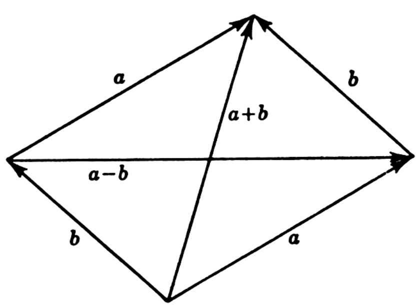


図1-2　ベクトルの加法

$$\alpha = r\cos\varphi,$$
$$\beta = r\sin\varphi$$

ということである．ゆえに，$a=\alpha+i\beta=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ とかける．この複素数の**極座標表示**において，r はつねに $\geqq 0$ にとることにすると r は絶対値 $|a|$ に等しい．角 φ を複素数 a の**偏角**といって $\arg a$ とかく．

2つの複素数 $a_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $a_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ を考える．その積は，$a_1a_2=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)]$ とかけ，三角関数の加法定理によりこれは次のようになる：

$$a_1a_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \tag{16}$$

積の絶対値は r_1r_2 で，積の偏角は $\varphi_1+\varphi_2$ になることがわかった．後者の結果は新しいから式にかいておこう：

$$\arg(a_1a_2)=\arg a_1+\arg a_2. \tag{17}$$

この公式が任意個数の積に対して拡張できることは明らかであり，次のようにいえる：

積の偏角は，各因数の偏角の和に等しい．

この結果は重要である．これは複素数の幾何学的表示の奥深いそして思いがけない正当性を示している．しかし，公式(17)に到達したここでの方法は，われわれの原理に違反していることを十分知っていなければならぬ．まず第一に(17)は角の間の等式で数の間のものではない．第二に，その証明は三角法の使用によった．したがって，偏角を解析学の言葉で定義すること，(17)を純粋に解析的な方法で証明することは残っている．この証明はあとに保留して，しばらくの間それほど批判的でない見地をとり，(17)から導かれるものを議論してよいだろう．

まず，0の偏角は定義されていないことを注意しておく．ゆえに，(17)は a_1 と a_2 が $\neq 0$ のときだけ意味がある．次に，角というものは 360° の整数倍を除いてきまる．この理由から，もし(17)を数値的にみるなら，360°の整数倍は無視することにしなければならぬ．

(17)から積 a_1a_2 の簡単な作図法がえられる．実際, 0, 1, a_1 を頂点にもつ三角形は 0, a_2, a_1a_2 を頂点にもつ三角形と相似になることがわかる．点 0, 1, a_1, a_2 は与えられているから，この相似により点 a_1a_2 はきまる(図1-2)．

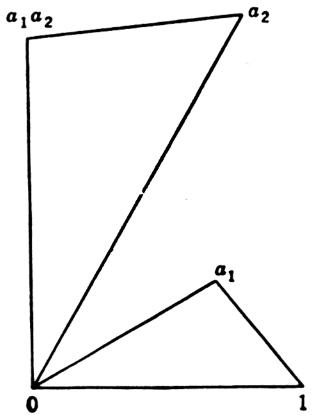


図1-2　ベクトルの乗法

商の場合には(17)を

$$\arg\frac{a_2}{a_1}=\arg a_2-\arg a_1 \tag{18}$$

とかきかえればよい．作図法は同様で，相似な三角形が今度は 0, 1, a_1 と 0, a_2/a_1, a_2 とになる．

注：角や偏角を定義する方法で文句なしに受け入れられるのは，円弧の長さを定積分で表わす微分積分学のよく知られた方法を適用することであろう．それから三角関数の正確な定義が導かれ，計算による加法定理の証明もえられる．この方法をわれわれがとらないのは，実解析とはちがって複素解析ではもっともっと直接的な方法があるからである．その手掛りは指数関数と三角関数との結びつきにあり，第2章3節で説明する．それまで，読者は完全な厳密さを求めることを待ってほしい．

問　題

1. 実軸虚軸の間の角の2等分線に関する点 a の対称点を求めよ．

2. 3点 a_1, a_2, a_3 が正3角形の頂点になるための必要十分条件は，$a_1^2+a_2^2+a_3^2=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$ であることを示せ．

3. a, b を正方形の2頂点とするとき，他の2頂点を求めよ．(すべての場合を考えよ)．

4. a_1, a_2, a_3 を頂点とする三角形を囲む外接円の中心と半径を求めよ．結果は a_1, a_2, a_3 に関し対称な形でかけ．

2.2. 二項式

前節の結果から $a=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ の累乗は，

$$a^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \tag{19}$$

となることがわかる．この公式は $n=0$ に対しても正しいし，

$$a^{-1}=r^{-1}(\cos\varphi-i\sin\varphi)=r^{-1}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]$$

であるから，n が負整数のときにも成り立つ．

$r=1$ として，**ド・モアブルの公式**

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi \tag{20}$$

がえられ，これは $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ を $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ の式で表す非常に簡単な方法を与える．

複素数 a の n 乗根をみつけるのには，方程式

$$z^n=a \tag{21}$$

をとけばよい．$a\neq 0$ として $a=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ とかき，$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく．すると，(21)は次の形になる：

$$\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{22}$$

この式は，$\rho^n=r$, $n\theta=\varphi$ なら確かに成り立つ．ゆえに，解として

$$z=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

をうる．ここで，$\sqrt[n]{r}$ は正数 r の正の n 乗根である．

しかし，これが解の全部というわけではない．実際，$n\theta$ が φ と360°の整数倍だけちがっているときも(22)は成り立つ．角はラジアンで表すことにすると360°は 2π で，(22)の必要十分条件は，k を任意の整数として

$$\rho=\sqrt[n]{r},\qquad \theta=\frac{\varphi}{n}+k\cdot\frac{2\pi}{n}$$

となることである．しかし，$k=0,1,\cdots,n-1$ だけが z の異なる値を与えるから，方程式(21)の完全解は次の式で与えられる：

$$z=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)\right],\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

0でない任意の複素数は n 個の n 乗根をもち，それらは絶対値が等しく偏角が等間隔になっている．

幾何的にいえば，n 乗根の全体は正 n 角形の頂点になっている．

$a=1$ の場合は特別に重要である．方程式 $z^n=1$ の根は1の n 乗根とよばれ，

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n} \tag{23}$$

とおくと，1の n 乗根の全体は $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$ によって与えられる．a の n 乗根のどれか一つを $\sqrt[n]{a}$ とかくと，a の n 乗根の全体は $\omega^k\cdot\sqrt[n]{a}$, $k=0, 1, \cdots, n-1$ となることは明らかである．

問　題

1. $\cos 3\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\sin 5\varphi$ を，$\cos\varphi$ と $\sin\varphi$ の式で表せ．
2. $1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cdots+\cos n\varphi$ と，$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\cdots+\sin n\varphi$ を簡単にせよ．
3. 1の5乗根と10乗根を代数的な形で求めよ．
4. ω は(23)で与えられたものとし，h を n の倍数でない任意の整数とするとき，次の式を証明せよ：
$$1+\omega^h+\omega^{2h}+\cdots+\omega^{(n-1)h}=0.$$
5. 次の式の値は何か？（ω, h は前問と同じ.）
$$1-\omega^h+\omega^{2h}-\cdots+(-1)^{n-1}\omega^{(n-1)h}.$$

2.3. 解析幾何　古典的な解析幾何では，軌跡の方程式は x と y の間の関係である．それは z と $\bar{z}$ の式にかきかえうるが，そうすることがときには別の役にたつ．おぼえておいてほしいことだが，複素数の方程式は実部虚部にわけると普通には2つの実数の連立方程式と同値であり，本当に軌跡をうるためにはこの2つの式が本質的に同じものでなければならない．

例えば，円の方程式は $|z-a|=r$ である．それは代数的な形では $(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=r^2$ ともかける．この方程式が複素共役に対し不変であるということは，これがただ一つの実数の方程式であることを示している．

複素平面において直線は助変数を含む方程式 $z=a+bt$ で与えられる．ここで，a, b は複素数で $b\neq 0$ であり，助変数 t は実数をすべて動く．2つの方程式 $z=a+bt$ と $z=a'+b't$ が同じ直線を表す必要十分条件は，$a'-a$ と b' が b の実数倍になることである．この2直線が平行になるのは，b' が b の

実数倍のときで，b' が b の正数倍ならば向きまで同じになる．向きづけられた直線の方向は $\arg b$ と同一視できる．$z=a+bt$ と $z=a'+b't$ とのなす角は $\arg b'/b$ である；2直線のどちらを先にいうかその順番に関係していることに注意してほしい．2直線が直交するのは b'/b が純虚数のときである．

直線と円の交点を求めたり，平行線，直交する直線，接線などを求めたりする問題は，複素数の式で表せばいつも非常に簡単になる．

不等式 $|z-a|<r$ は円の内部を表す．同様に，向きづけられた直線 $z=a+bt$ は，$\mathrm{Im}(z-a)/b<0$ をみたす点の全体からなる右半平面をきめ，$\mathrm{Im}(z-a)/b>0$ により左半平面をきめる．容易に，この右左の区別は直線の助変数表示の仕方によらないことがわかる．

問 題

1. いつ，$az+b\bar{z}+c=0$ は直線を表すか．
2. 楕円，双曲線，放物線の式を複素数でかけ．
3. 平行四辺形の対角線が互いに他を2等分すること，菱形の対角線が直交することを証明せよ．
4. 円の平行な弦の中点は，その弦に直交する直径の上にある．これを解析的に証明せよ．
5. a と $1/\bar{a}$ を通る円は，円 $|z|=1$ と直交することを示せ $(a\neq 1/\bar{a})$．

2.4. 球面表示

無限大を表す記号 ∞ を導入して，複素数体 $\boldsymbol{C}$ を拡張しておくといろいろ便利である．有限の数との関係は，任意の有限の数 a に対し $a+\infty=\infty+a=\infty$ と定義し，$b=\infty$ も含めて任意の $b\neq 0$ に対し

$$b\cdot\infty=\infty\cdot b=\infty$$

と定義する．しかし，$\infty+\infty$ と $0\cdot\infty$ は計算規則を乱すことなしに定義することはできない．にもかかわらず，特別なしきたりとして $a\neq 0$ のとき $a/0=\infty$ とかき，$b\neq\infty$ のとき $b/\infty=0$ とかく．

平面には ∞ に対応する点をいれる透き間はないが，**無限遠点**とよぶ‘空想的な’点を導入することはできる．平面の点全体に無限遠点を合わせたものを**拡張された複素平面**という．すべての直線は無限遠点を通ると約束する．

それと対照して，半平面はいつも無限遠点を含まないことにする．
拡張された平面のすべての点が具体的に表示されるような，幾何学的モデルを作ることは望ましい．そのために，3次元空間で $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ で表される単位球面 S を考える．点 (0, 0, 1) を除く S のすべての点に複素数

$$z=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3} \tag{24}$$

を対応させることができ，この対応は1対1である．実際，(24)から

$$|z|^2=\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_3)^2}=\frac{1+x_3}{1-x_3}$$

となり，ゆえに

$$x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \tag{25}$$

をうる．さらに計算して次の式をうる：

$$x_1=\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2},\quad x_2=\frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}. \tag{26}$$

無限遠点を点 (0, 0, 1) に対応させて，単位球面 S と拡張された複素平面との1対1対応ができあがり，これで球面を拡張された平面，あるいは拡張された複素数の表示とみることができる．半球面 $x_3<0$ には円 $|z|<1$ が対応し，半球面 $x_1>0$ には円の外部 $|z|>1$ が対応していることを注意しておく．関数論では，球面 S を**リーマン球面**とよんでいる．

複素平面を，x_1 軸，x_2 軸を実軸，虚軸とする (x_1, x_2) 平面とみなすと，対応(24)は簡単な幾何学的意味をもつ．$z=x+iy$ とかくと，

$$x:y:-1=x_1:x_2:(x_3-1) \tag{27}$$

がわかり，これは3点 $(x, y, 0)$, (x_1, x_2, x_3), $(0, 0, 1)$ が一直線上にあることを示している．ゆえに，この対応は図1-3に示すように，中心(0, 0, 1)からの射影である．これを**立体射影** (stereographic projection) という．立体射影を，球面 S から拡張された複素平面への写像とみなすか，またはその逆の写像とみなすか，これは前後の関係からきまるであろう．

球面表示において，複素数の加法乗法を図示することは簡単ではない．その利益は，無限遠点をもはや別扱いにすることはないという点にある．

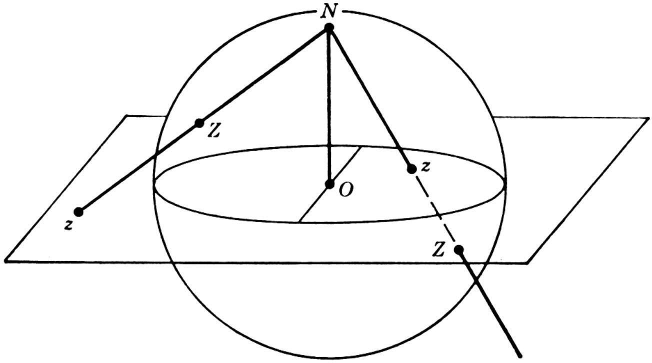


図1-3　立 体 射 影

立体射影が z 平面の直線を S 上の北極$(0,\ 0,\ 1)$を通る円に写し，その逆もいえることは図から明らかであろう．一般に，球面上の円は z 平面の円か直線に写る．これを証明するために，球面上の円が平面 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=\alpha_0$ の上にあるとする．ここで，$\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^3=1,\ 0\leqq\alpha_0<1$ としてよい．$z, \bar{z}$ でかくと，この式は次の形になる：

$$\alpha_1(z+\bar{z})-\alpha_2 i(z-\bar{z})+\alpha_3(|z|^2-1)=\alpha_0(|z|^2+1),$$

または，
$$(\alpha_0-\alpha_3)(x^2+y^2)-2\alpha_1x-2\alpha_2y+\alpha_0+\alpha_3=0.$$

$\alpha_0\neq\alpha_3$ ならばこれは円の方程式であり，$\alpha_0=\alpha_3$ ならば直線をあらわす．逆に，円と直線はこの形にかける．したがって，対応は1対1である．

z, z' の立体射影の間の距離 $d(z, z')$ は容易に計算できる．対応する球面上の点を (x_1, x_2, x_3), (x_1', x_2', x_3') とかくと，まず

$$(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2=2-2(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3')$$

となる．(25)，(26)から簡単な計算をして

$$x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3'=\frac{(z+\bar{z})(z'+\bar{z}')-(z-\bar{z})(z'-\bar{z}')+(|z|^2-1)(|z'|^2-1)}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}$$
$$=\frac{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)-2|z-z'|^2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}$$

をうる．結局，

$$d(z, z')=\frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}} \tag{28}$$

となる．$z'=\infty$ のときには次のようになる：

$$d(z, \infty)=\frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

問　題

1. z と z' がリーマン球面上の直径の両端の点に対応するには，$z\bar{z}'=-1$ が必要十分である．
2. 頂点がリーマン球面上にのっていて各辺は座標軸に平行な立方体がある．その立方体の頂点の立体射影を求めよ．
3. 一般の位置にある正四面体について前問と同じことを考えよ．
4. Z, Z' を z, z' の立体射影とし N を北極とする．三角形 NZZ' と三角形 Nzz' が相似であることを示し，それから(28)を導け．
5. 平面上で中心が a 半径が R の円の，リーマン球面への像の半径を求めよ．

第2章　複素関数

1．解析関数の概念の導入

複素変数の関数論は微分積分法を複素領域へ拡張することが目的である．そうすると，微分も積分も新しい深さと意味を獲得するが，同時に適用可能な範囲は極端に制限される．実際，解析関数(または正則関数ともいう)だけが自由に微分でき積分できて，それだけが，フランス語で，'Théorie des fonctions'，ドイツ語で 'Funktionentheorie' とよばれる意味での，真の '関数' である．

しかし，われわれは '関数' という言葉を現代的な意味で用いよう．したがって，複素数へもっていくのに，4種類の関数：実変数の実数値関数，複素変数の実数値関数，実変数の複素数値関数，複素変数の複素数値関数を考えねばならない．実用上，文字 z, w はいつも複素変数を表すことと約束する．ゆえに，複素変数の複素数値関数は $w=f(z)$ と表される[†]．記号 $y=f(x)$ は中立的に用いて，x, y は実数でも複素数でもありうると了解する．変数が実数ときまっていることを示したいときには，それをいつも t とかくことにする．この約束によって，$z=x+iy$ とかいたときには自動的に x, y は実数であるという今迄のしきたりをやめてしまうというのではない．

関数を定義する法則は，明確で疑いの余地のない言葉でのべられねばならぬということが本質的である．つまり，すべての関数は定義が明確 (well defined) でなければならず，のちに注意するまで一価である[††]．

関数は独立変数のすべての値に対して定義されているとはかぎらない．しばらくの間，点集合論の役割を故意に低くみることにする．したがって，関数はすべて開集合の上で定義されていると，ただ非公式に約束する．その意

---

†) 現代的な学生は，f が関数を表し $f(z)$ は関数の一つの値を表すということに，よく気がつく．しかし，解析学をやる人は伝統にしたがい，'関数 $f(z)$' という言い方をやめない．

††) 関数は独立変数の一つの値に対し一つの値だけをとるということを強調して，余分な言葉であるが**一価関数**という云い方を時々する．

味は，$f(a)$ が定義されておれば a に十分近いすべての x に対しても $f(x)$ が定義されているということである．点集合の位相の正式な取り扱いは，次章において行う．

1.1. 極限と連続性

次の基本的な定義を採用する：

定義1　関数 $f(x)$ が x を a に近づけたときに**極限** A をもつ，記号でかくと

(1) $$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

というのは次のことが成り立つことである：

任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在し，$|x-a|<\delta$, $x\neq a$ をみたすすべての x に対し $|f(x)-A|<\varepsilon$ が成り立つようにできる．

この定義では絶対値が決定的に用いられている．絶対値の概念は複素数でも実数でも同様だから，変数 x と関数 $f(x)$ が実数か複素数かにかかわらず同じ定義を用いうる．

もう一つの簡単な記号として，'$x\to a$ のときに $f(x)\to A$' とかくこともある．

a または A が無限大になるときには見慣れたいいかえをする．実数のときには極限 $+\infty$ と極限 $-\infty$ とを区別することができるが，複素数のときには一つの無限大極限があるだけである．すべての場合をつくして正確な定義を与えることは読者にまかせよう．

和，積，商の極限に関するよく知られた結果は複素数の場合も同様に成り立つ．何故なら，証明は

$$|ab| = |a|\cdot|b|, \quad |a+b| \leqq |a|+|b|$$

という絶対値の性質だけを用いてできるからである．

条件 (1) は

(2) $$\lim_{x\to a} \overline{f(x)} = \overline{A}$$

と明らかに等しい．(1) と (2) から

(3) $$\lim_{x\to a}\operatorname{Re} f(x)=\operatorname{Re} A,\quad \lim_{x\to a}\operatorname{Im} f(x)=\operatorname{Im} A$$

をうる．逆に，(3) から (1) は導かれる．

関数 $f(x)$ は，$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ となるときに，**a で連続**とよばれる．たんに**連続関数**といえば，定義されているすべての点で連続な関数のことである．

2つの連続関数の和 $f(x)+g(x)$，積 $f(x)g(x)$ はまた連続である；商 $f(x)/g(x)$ は $g(a)\neq 0$ の点 a でのみ定義されそこで連続である．$f(x)$ が連続ならば，$\operatorname{Re} f(x)$, $\operatorname{Im} f(x)$, $|f(x)|$ も連続である．

関数の微分係数は特殊な極限として定義され，変数が実数か複素数かにかかわらず考えられる．形式的な定義は

(4) $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

である．和，積，商の微分係数を求めるいつもの公式はすべて成立する．合成関数の微分の公式も成り立つ．

しかし，独立変数が実数のときと複素数のときでは根本的な差違がある．この点を例示するために，$f(z)$ は複素変数の実関数で $z=a$ で微分係数をもつものとしよう．$f'(a)$ は，h を実数で0に近づけたときの商

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

の極限だから，実数である．他方，商

$$\frac{f(a+ih)-f(a)}{ih}$$

の極限でもあるから，それは純虚数でもある．したがって $f'(a)$ は0でなければならぬ．複素変数の実関数は，微分係数が0か，でなければ微分係数は存在しない．

実変数の複素関数のときには，実数の場合にもっていける．$z(t)=x(t)+iy(t)$ とかけば，

$$z'(t)=x'(t)+iy'(t)$$

となり，$z'(t)$ の存在は $x'(t)$ と $y'(t)$ が同時に存在することと同値である．しかし，複素数の記号でかくことは形式的な利益があり，やめてしまうのは利

ロでないだろう.

これと比べて，複素変数の複素関数の微分係数の存在は，その関数の構造的な性質に広範囲の影響を与える．この研究が複素関数論の中心的テーマである.

1.2. 解析関数　複素変数の複素関数で，定義されている各点で微分係数をもつものを，**解析関数**という．**正則関数**ともいって，同じ意味である．準備をしている現在の段階では，読者はまず全平面で定義された関数を考えてよい.

2つの解析関数の和と積はまた解析的である．2つの解析関数の商 $f(z)/g(z)$ は，$g(z)$ が0にならないと仮定すれば，解析的である．一般には，$g(z)=0$ となる点を除く必要がある．したがって厳密にいえば，この代表的な場合が全平面で定義された関数を考えるというわれわれの考察に含まれなくなるが，自明な修正をすれば結果が正しいことは明らかであろう.

微分係数の定義は

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

という形でかける．まずわかることは，$f(z)$ は連続になる．実際，$f(z+h)-f(z)=h\cdot(f(z+h)-f(z))/h$ だから，

$$\lim_{h\to 0}(f(z+h)-f(z))=0\cdot f'(z)=0$$

をうる．$f(z)=u(z)+iv(z)$ とかけば，さらに $u(z)$ と $v(z)$ がともに連続なことがわかる.

h が0に近づく近づき方によらず極限は同じでなければならない．h を実数にとって0に近づけると，虚数部分 y は一定であり微分係数は x に関する偏微分係数になる．したがって，次の式をうる：

$$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

同様に，h を純虚数 ik にして0に近づけると，

$$f'(z)=\lim_{k\to 0}\frac{f(z+ik)-f(z)}{ik}=-i\frac{\partial f}{\partial y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

をうる．ゆえに，$f(z)$ は偏微分方程式

(5)
$$\frac{\partial f}{\partial x}=-i\frac{\partial f}{\partial y}$$

をみたすことがわかり，これを実数の方程式にわけると，

(6)
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

となる．これは，**コーシー・リーマンの微分方程式**とよばれ，解析関数の実部と虚部はこれをみたさねばならない†.

(6)にあらわれる4つの偏微分の存在は，$f'(z)$ の存在から導かれることを注意しておく．(6)を用いて，形式的に異なる4つの式で $f'(z)$ を書き下すことができる；もっとも簡単なのは

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

である．例えば $|f'(z)|^2$ を計算すると，

$$|f'(z)|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

となる．この最後の式は，$|f'(z)|^2$ が u, v の x, y に関するヤコビアンになることを示している．

のちに，解析関数の導関数がまた解析的になることを証明する．これから，u, v は何回でも偏微分可能で偏導関数はすべて連続となり，とくに，x で偏微分し y で偏微分することは y で偏微分し x で偏微分することにつねに等しいことがわかる．これを用いると，(6)から

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

をうる．

ラプラス方程式 $\Delta u=0$ をみたす関数を**調和関数**という．したがって，解

---

†) Augustin Cauchy (1789–1857), Bernhard Riemann (1826–1866) は複素関数論の開祖とみなされる．リーマンの仕事は幾何学的側面を強調し，それに比べてコーシーは純粋に解析的な方法を採用した．

析関数の実部と虚部は調和関数である．２つの調和関数 u, v がコーシー・リーマンの方程式 (6) をみたすときに，v は u の**共役調和関数** (the conjugate harmonic function of u) であるという．実は，v には定数の差だけ自由度があるので，定冠詞 the の使用は伝統的ではあるが，あまり正確ではない．同じ意味で，u は $-v$ の共役調和関数になっている．

調和関数に課する微分可能性の条件をどこまで弱められるか，その議論はここではしない．共役調和関数の対で定義される関数 $u+iv$ は解析的になるということを示そう．仮定を明示すると，u と v は１回偏微分可能で１階偏導関数は連続とし，(6) をみたすとする．微分可能性についてのこの条件の下で，偏微分法の定理から

$$u(x+h, y+k)-u(x, y)=\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k+\varepsilon_1,$$

$$v(x+h, y+k)-v(x, y)=\frac{\partial v}{\partial x}h+\frac{\partial v}{\partial y}k+\varepsilon_2$$

とかけ，$h+ik\to 0$ のときに $\varepsilon_1/(h+ik)\to 0$，$\varepsilon_2/(h+ik)\to 0$ という意味で，剰余項 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は $h+ik$ より早く 0 に近づくことがわかっている．$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とおくと，(6)により

$$f(z+h+ik)-f(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(h+ik)+\varepsilon_1+i\varepsilon_2$$

となり，ゆえに，

$$\lim_{h+ik\to 0}\frac{f(z+h+ik)-f(z)}{h+ik}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

をうる．これで，$f(z)$ は解析的がいえた．

$u(x, y)$, $v(x, y)$ が偏微分可能で偏導関数は連続とし，コーシー・リーマンの微分方程式をみたすとすると，$f(z)=u(z)+iv(z)$ は解析関数で，導関数 $f'(z)$ は連続となる．また，この逆も成り立つ．

調和関数の共役調和関数は積分によって作ることができ，簡単な場合には具体的に計算することができる．例えば，$u=x^2-y^2$ は調和で，$\partial u/\partial x=2x$, $\partial u/\partial y=-2y$ である．したがって，共役調和関数は

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2x$$

をみたさねばならぬ．最初の式から，$v=2xy+\varphi(y)$ となり，$\varphi(y)$ は y だけの関数である．2番目の式に代入すると，$\varphi'(y)=0$ となる．ゆえに $\varphi(y)$ は定数となり，x^2-y^2 の共役調和関数の一般式は，c を実数の定数として $2xy+c$ となる．$x^2-y^2+2ixy=z^2$ で，実部が x^2-y^2 の解析関数は z^2+ic である．

解析関数の本性にかなりの光を投げかける興味ある形式的な手続きがある．それを説明するが，それは純粋に形式的であり，証明としての効力は持たないということを，読者にはっきりと警告しておく．

2実変数の複素関数 $f(x,y)$ を考える．複素変数 $z=x+iy$ とその共役 $\bar{z}=x-iy$ を導入すると，$x=(z+\bar{z})/2,\ y=-i(z-\bar{z})/2$ となる．この変数変換で $f(x,y)$ を $z,\bar{z}$ の関数とみて，$z,\bar{z}$ を独立変数として扱う．（実際は互いに共役であるということを忘れてしまう）．微分法の規則が適用できると仮定すると，

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

をうる．極限によってこの式をうまく定義することはできないが，z と $\bar{z}$ に関する記号的な微分として，これを定義のようにとりいれよう．(5)をみると，解析関数は $\partial f/\partial\bar{z}=0$ によって特徴づけられることがわかる．したがって，解析関数とは $\bar{z}$ によらない z だけの関数のことであると，云いたくなる．

2実変数の複素関数として表す方がより適当である関数と対立して，解析関数こそが真に1複素変数の関数なのだという見地を，この形式的な推論は支持している．

同様の形式的な議論で，与えられた調和関数 $u(x,y)$ を実部とする解析関数 $f(z)$ を，積分を用いずに計算する簡単な方法がえられる．まず，共役関数 $\overline{f(z)}$ の z に関する微分は0で，ゆえに $\bar{z}$ の関数とみなしてよいことに注意する；この共役関数を $\bar{f}(\bar{z})$ とかこう．この記号を用いると次の等式がかき下せる：

$$u(x, y)=\frac{1}{2}[f(x+iy)+\bar{f}(x-iy)].$$

これを文字式としての等式と期待するのはもっともで，すると x, y を複素数にしても成り立つことになる．$x=z/2, y=z/2i$ を代入して，

$$u(z/2, z/2i)=\frac{1}{2}[f(z)+\bar{f}(0)]$$

をうる．$f(z)$ は純虚数の定数の差を除いて定まるのだから，$f(0)$ は実数と仮定してよく，すると $\bar{f}(0)=u(0, 0)$ となる．ゆえに，関数 $f(z)$ は公式

$$f(z)=2u(z/2,\ z/2i)-u(0,\ 0)$$

により計算できる．純虚数の定数は任意に加えてよい．

この方法で計算できるのは，明らかに $u(x, y)$ が有理関数のときに限られている．何故なら，関数 u が変数の複素数値に対しても意味を持たなければならぬから．しかし，この方法は一般のときにも拡張でき，完全な正当化をすることができるのである．

問　題

1. $g(w)$ と $f(z)$ が解析関数のとき，$g(f(z))$ も解析的になることを示せ．
2. 関数 z^2 と z^3 に対し，コーシー・リーマンの方程式が成り立つことを確かめよ．
3. $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ の形をした調和な多項式のできるだけ一般な形を求めよ．その共役調和関数と対応する解析関数を，積分による方法と形式的な方法と両方のやり方で求めよ．
4. 解析関数の絶対値が一定ならば，定数関数になることを示せ．
5. $f(z)$ と $\overline{f(\bar{z})}$ は z の関数として，一方が解析的ならば他方もまた解析的になることを，厳密に証明せよ．
6. $u(z)$ と $u(\bar{z})$ は一方が調和なら他方もまた調和になることを証明せよ．
7. 調和関数は形式的な微分方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial\bar{z}}=0$ をみたすことを示せ．

1.3. 多項式　定数は解析関数でその導関数は 0 である．定数でないもっとも簡単な解析関数は z で，その導関数は 1 である．2 つの解析関数の和，積はまた解析的だから，任意の多項式

$$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n \tag{7}$$

は解析関数であることがわかる．その導関数は

$$P'(z)=a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}$$

である．(7) のように書いたときには，$a_n\neq 0$ と暗黙のうちにだいたい仮定されているとしよう．そのとき，この多項式は次数 n であるという．定数 0 は多項式とみたときに多くの点で例外的なので我々の考察から外すだろう[†]．

$n>0$ のとき，方程式 $P(z)=0$ は少くとも 1 つの根をもつ．これは，いわゆる代数学の基本定理であり，のちに証明する．$P(\alpha_1)=0$ とすると，$P(z)=(z-\alpha_1)P_1(z)$ で $P_1(z)$ は $n-1$ 次の多項式となることは，初等代数で知られている．この方法をくり返して，結局

$$P(z)=a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n) \tag{8}$$

と完全に因数分解できる．ここで，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ の中には同じものが重複してあらわれるかもしれない．この因数分解から，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ を除く他の点 z では $P(z)$ は 0 にならないことがわかる．なお，この因数分解は因数の順番を除いて一意的である．

ちょうど h 個の α_j が重複して同じとき，その値を $P(z)$ の**位数 h の零点**という．多項式の零点の位数の総和はその次数に等しいことがわかる．もっと簡単にいって，各零点をその位数だけ重複してかぞえることにすると，n 次多項式はちょうど n 個の零点をもつ．

零点 α の位数は $z=\alpha$ での $P(z)$ の高階の微分係数を考えれば決定できる．α を h 位の零点としよう．このとき，$P(z)=(z-\alpha)^hP_h(z),\ P_h(\alpha)\neq 0$ とかける．次々と微分していって，$P(\alpha)=P'(\alpha)=\cdots=P^{(h-1)}(\alpha)=0$ であるが $P^{(h)}(\alpha)\neq 0$ となる．いいかえると，零点の位数は高階の微分係数ではじめて 0 にならないものの階数に等しい．位数 1 の零点は単純零点とよばれ，$P(\alpha)=0$, $P'(\alpha)\neq 0$ で特徴づけられる．

応用として，ルカスの定理として知られる次の定理を証明しよう．

[†]) 形式的理由から，定数 0 を多項式とみたときには，その次数は $-\infty$ とする．

定理1　多項式 $P(z)$ の零点がすべて1つの半平面内にあれば，導関数 $P'(z)$ の零点もすべて同じ半平面内にある．

(8) から次の式をうる：

$$\frac{P'(z)}{P(z)}=\frac{1}{z-\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{z-\alpha_n}. \tag{9}$$

半平面 H を $\operatorname{Im}(z-a)/b<0$ で定義される平面の部分としよう（1章2.3節）．α_k は H に入り z は H に入らないとすると，

$$\operatorname{Im}\frac{z-\alpha_k}{b}=\operatorname{Im}\frac{z-a}{b}-\operatorname{Im}\frac{\alpha_k-a}{b}>0$$

である．逆数の虚数部分は符号がかわる．ゆえに，同じ仮定の下で，$\operatorname{Im}b(z-\alpha_k)^{-1}<0$ である．これがすべての k に対し成り立つと，(9) から

$$\operatorname{Im}\frac{bP'(z)}{P(z)}=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Im}\frac{b}{z-\alpha_k}<0$$

となり，$P'(z)\neq 0$ をうる．

もっと精密な形にして，この定理から $P(z)$ の零点をすべて含む凸多角形は $P'(z)$ の零点をすべて含むことがいえる．

1.4. 有理関数　2つの多項式の商として定義される有理関数

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)} \tag{10}$$

の場合を考える．$P(z)$ と $Q(z)$ は共通因子をもたず，したがって共通零点をもたないと仮定するが，これは重要である．$Q(z)$ の零点では $R(z)$ の値は ∞ としよう．ゆえに，有理関数は拡張された複素平面に値をもつ関数と考えるべきであり，そのような関数とみれば連続になる．$Q(z)$ の零点を $R(z)$ の**極** (pole) という．極の位数を対応する $Q(z)$ の零点の位数により定義する．

$Q(z)\neq 0$ のときだけ導関数

$$R'(z)=\frac{P'(z)Q(z)-Q'(z)P(z)}{Q(z)^2} \tag{11}$$

が存在する．右辺で定義される有理関数として，$R'(z)$ は $R(z)$ と同じ極をも

ちその極の位数は1だけふえる．$Q(z)$ が重複零点をもつときには，(11) の表現は既約な形ではないことに注意するべきである．

関数値 $R(z)$ と同様に変数 z も拡張された平面の上を動くことにすれば，より大きな統一がえられる．$z\to\infty$ としたときの極限として $R(\infty)$ を定義してもよいが，これでは∞が零点や極のときにその位数をきめられない．したがって，関数 $R(1/z)$ を考えそれを z の有理関数として $R_1(z)$ とかき，

$$R(\infty)=R_1(0)$$

とおく方がよい．$R_1(0)=0$，または∞ならば，∞での零点または極の位数は $R_1(z)$ の原点での零点または極の位数と定義する．

$$R(z)=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m}$$

とかくと，

$$R_1(z)=z^{m-n}\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}$$

となり，z^{m-n} は分子か分母に入る．ゆえに，$m>n$ ならば $R(z)$ は∞で $m-n$ 位の零点をもち，$m<n$ ならば∞で $n-m$ 位の極をもち，$m=n$ ならば

$$R(\infty)=a_n/b_m\neq 0,\ \infty$$

となる．

拡張された平面で，零点と極の総数を計算することができる．零点の個数は∞でのそれも含めれば m と n の大きい方に等しい．極の個数も同じである．零点の個数と極の個数は等しいが，その数を有理関数の**位数**という．

a を任意の定数とすると，関数 $R(z)-a$ は $R(z)$ と同じ極をもち，ゆえに同じ位数である．$R(z)-a$ の零点は方程式 $R(z)=a$ の根であり，その根をその零点の位数だけ重複して数えることにすると次の結果をうる：

位数 p の有理関数は p 個の零点と p 個の極をもち，任意の a に対し，方程式 $R(z)=a$ はちょうど p 個の根をもつ．

位数1の有理関数は1次分数関数

$$S(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

で，既約分数だから $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ である．これは**1次変換**ともいうが，3章3節で詳しく研究する．ここでは，方程式 $w=S(z)$ はちょうど1つの根をもち，それは実際に

$$z=S^{-1}(w)=\frac{\delta w-\beta}{-\gamma w+\alpha}$$

となることだけいっておく．変換 S と S^{-1} は互いに逆写像である．

1次変換 $z+a$ を**平行移動**といい，$1/z$ を**反転**という．前者は ∞ を不動点にもち，後者は0と∞をいれかえる．

すべての有理関数は**部分分数**に展開することができる．この表現を導くために，まず $R(z)$ は∞を極にしているとしよう．このとき，$P(z)$ を $Q(z)$ で割る割り算を，余りの次数が $Q(z)$ の次数以下になるまで実行し，$G(z)$ を定数項のない多項式とし $H(z)$ は∞で有限な有理関数として，

$$R(z)=G(z)+H(z) \tag{12}$$

とかくことができる．$G(z)$ の次数は∞での極の位数であり，多項式 $G(z)$ を∞での $R(z)$ の**特異部**という．

有限のところにある相異なる $R(z)$ の極を $\beta_1, \cdots, \beta_q$ とかく．関数 $R\left(\beta_j+\frac{1}{\zeta}\right)$ は ζ の有理関数で $\zeta=\infty$ に極をもつ．(12)の分解をして

$$R\left(\beta_j+\frac{1}{\zeta}\right)=G_j(\zeta)+H_j(\zeta)$$

とかくことができ，変数をかきかえて

$$R(z)=G_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right)+H_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right)$$

となる．ここで，$G_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right)$ は定数項のない $\frac{1}{z-\beta_j}$ の多項式で，β_j での $R(z)$ の**特異部**とよばれる．関数 $H_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right)$ は $z=\beta_j$ で有限の値をもつ．

次の式を考えよう：

$$R(z)-G(z)-\sum_{j=1}^{q}G_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right). \tag{13}$$

これは有理関数で，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$ と ∞ のほかには極をもちえない．$z=\beta_j$ で無限大になる項が2つありその差は $H_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right)$ で有限の極限をもつ．∞で

も同様である．ゆえに，(13)は有限のところに極をもたないし，∞も極でない．極をもたない有理関数は定数関数だけだから，この定数を $G(z)$ にくりこんで，次の式をうる：

$$R(z)=G(z)+\sum_{j=1}^{q} G_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right). \tag{14}$$

この表現は，微分積分法で積分の計算の技術的方策として用いられ，有名である．しかし，複素数を用いてはじめて申し分なくうまくいくのである．

問　題

1. 上記の方法を用いて次の関数を部分分数に展開せよ：

$$\frac{z^4}{z^3-1},\quad \frac{1}{z(z+1)^2(z+2)^3}.$$

2. Q は相異なる根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ をもつ多項式，P は次数 $<n$ の多項式とするとき，次の式を示せ：

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)(z-\alpha_k)}.$$

3. 前問の結果を用いて，点 α_k で与えられた値 c_k をもつような次数 $<n$ の多項式 P が唯一つ存在することを示せ．（ラグランジュの補間多項式．）
4. 円周 $|z|=1$ の上では絶対値が1であるような有理関数の一般形は何か．とくに，その零点と極は互いにどのように関係しているか．
5. 有理関数が $|z|=1$ の上で常に実数値をとるならば，その零点と極はどのような位置にあるか．
6. $R(z)$ が位数 n の有理関数のとき，$R'(z)$ の位数はどうなるか．起りうる最大と最小を求めよ．

2．整級数の基本的性質

多項式と有理関数は非常に特殊な解析関数である．もっと種々なものをうるための，一番簡単な方法は極限を作ることである．例えば，収束級数の和はそのような極限である．各項がある変数の関数ならば和もそうで，各項が解析関数ならばその和も解析的になる可能性はかなりある．

解析関数を項とする級数の中で，複素数係数の整級数は一番簡単である．

この節では整級数のごく基本的な性質だけを調べる．もっと一般的な性質を証明する準備がまだできていないのに(それは積分を必要とする)，これを行う強い動機は指数関数を構成する為（3節）に整級数が必要となるからである．

2.1. 数列　数列 $\{a_n\}_1^\infty$ が極限 A をもつというのは，任意の $\varepsilon>0$ に対し，$n\geqq n_0$ ならば $|a_n-A|<\varepsilon$ が成り立つような，n_0 が存在することである．有限の極限をもつ数列は**収束**するといい，収束しない数列は**発散**するという．$\lim a_n=\infty$ のとき，数列は**無限大に発散**するともいう．極限を示して収束が証明できる場合は滅多になく，極限をはっきりと決められないときでもその存在の証明ができる方法が重要である．コーシーの判定法はこの目的に役立つ．数列が**基本列**，または**コーシー列**であるというのは，任意の $\varepsilon>0$ に対し n_0 が存在し，$n\geqq n_0$，$m\geqq n_0$ ならば $|a_n-a_m|<\varepsilon$ をみたすようにできることである．コーシーの判定法とは次のことである：

数列が収束する必要十分条件は，その数列がコーシー列になること．

必要なことは見易い．$a_n\to A$ とすると，$\varepsilon>0$ に対し n_0 をとり $n>n_0$ ならば $|a_n-A|<\varepsilon/2$ となるようにできる．$m, n\geqq n_0$ のとき，三角不等式より $|a_n-a_m|\leqq|a_n-A|+|a_m-A|<\varepsilon$ となる．

十分性は実数の定義と密接に関係し，実数を定義する一つの方法にコーシーの条件の十分性を公理にすることがある．しかし，ここでは有界で単調な実数列は極限をもつということを基礎におこう．

コーシー列の実部と虚部はまたコーシー列になり，それらが収束すればもとの数列を収束する．ゆえに，実数列に対してのみ十分性を証明すればよい．この機会を利用して，**上極限**，**下極限**の概念を復習しよう．実数列 $\{\alpha_n\}_1^\infty$ を考える．$a_n=\max\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ とおく．すなわち，a_n は $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の最大である．数列 $\{a_n\}_1^\infty$ は非減少（$a_1\leqq a_2\leqq\cdots$）だから極限 A_1 をもち，A_1 は有限かまたは $+\infty$ である．A_1 は $\{\alpha_n\}$ の最小上界または上限（l. u. b. または sup）とよばれる数，つまり，すべての α_n より以上である数の中で最小である．もとの数列から $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}$ をとり去った数列 $\{\alpha_n\}_k^\infty$ の上限 A_k を同様

にして作る．$\{A_k\}$ は明らかに非増加数列であり，その極限 A は存在する．A は有限のことも $+\infty$ のことも $-\infty$ のこともある．どの場合も含めて，

$$A=\limsup_{n\to\infty} \alpha_n$$

とかき，$\{\alpha_n\}$ の上極限という．

上極限をその性質によって特徴づけることは容易である．上極限が有限のときは，任意の $\varepsilon>0$ に対し，n_0 があり $n_0\leqq n$ ならば $\alpha_n<A+\varepsilon$ が成り立ち，他方 $\alpha_n>A-\varepsilon$ をみたす α_n が無限個ある．これは次のようにしてわかる：n_0 を $A_{n_0}<A+\varepsilon$ となるようにとれば，$n_0\leqq n$ のとき $\alpha_n\leqq A_{n_0}$ で $\alpha_n<A+\varepsilon$ となる．$\alpha_n>A-\varepsilon$ をみたす α_n が有限個しかないとすると，n_0 があり $n_0\leqq n$ なら $\alpha_n\leqq A-\varepsilon$ となり，$A_{n_0}\leqq A-\varepsilon$ となるがこれは不可能である．$A=+\infty$ ということは $\{\alpha_n\}$ が上に有界でないことであり，$A=-\infty$ は $\alpha_n\to-\infty$ と同値である．いずれの場合も，この性質をみたす A は唯一つである．

下極限は不等号の向きを逆にして同様に定義できる．明らかに，上極限と下極限が一致することが，数列が有限の値に収束するか $+\infty$ に発散するか $-\infty$ に発散するかのいずれかになるための必要十分条件である．記号を簡単にして，上極限，下極限は $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$ ともしばしばかかれる．読者は次の式を証明せよ：

$$\underline{\lim}\ \alpha_n+\underline{\lim}\ \beta_n\leqq\underline{\lim}\ (\alpha_n+\beta_n)\leqq\underline{\lim}\ \alpha_n+\overline{\lim}\ \beta_n,$$
$$\underline{\lim}\ \alpha_n+\overline{\lim}\ \beta_n\leqq\overline{\lim}\ (\alpha_n+\beta_n)\leqq\overline{\lim}\ \alpha_n+\overline{\lim}\ \beta_n.$$

さて，コーシーの条件の十分性の証明にもどろう．$n\geqq n_0$ のとき $|\alpha_n-\alpha_{n_0}|<\varepsilon$ より $|\alpha_n|<|\alpha_{n_0}|+\varepsilon$ となり，これから $A=\overline{\lim}\ \alpha_n$ も $a=\underline{\lim}\ \alpha_n$ もともに有限である．$a\neq A$ ならば，$\varepsilon=(A-a)/3$ とし，この ε に対しコーシーの条件で n_0 をとる．a と A の定義から $m, n\geqq n_0$ で $\alpha_n<a+\varepsilon$, $\alpha_m>A-\varepsilon$ をみたすものがある．$A-a=(A-\alpha_m)+(\alpha_m-\alpha_n)+(\alpha_n-a)<3\varepsilon$ となり，これは ε のとり方に反する．ゆえに $a=A$ で，数列は収束する．

2.2.　級数　コーシーの条件の簡単な応用として，一つの数列の収束から別の数列の収束を示しうることがある．すべての m, n に対し $|b_m-b_n|\leqq$

$|a_m - a_n|$ が成り立つとき，数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の**収縮**とよぶことにしよう(これは一般に通用している用語ではない)．この条件の下で，$\{a_n\}$ がコーシー列ならば $\{b_n\}$ もそうなり，$\{a_n\}$ が収束すれば $\{b_n\}$ も収束する．

無限級数は形式的な無限和

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{15}$$

である．この級数からその部分和の数列

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

をうる．無限級数が収束するというのはその部分和の数列が収束することである．このとき，その部分和の数列の極限が無限級数の和である．

コーシーの収束判定法を級数に適用して次の条件をうる：級数(15)が収束するための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対し n_0 がとれ，$n > n_0$, $p \geqq 0$ ならば $|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$ となるようにできることである．$p = 0$ としてとくに $|a_n| < \varepsilon$ となる．ゆえに，収束する級数の一般項は 0 に収束する．これは必要条件で，もちろん十分条件ではない．

級数 (15) から有限個の項を除いても，新しくえられた級数の収束発散は(15)と同じである．収束するとして，a_{n+1} から始まる級数の和を R_n としよう．もとの級数(15)の和は $S = s_n + R_n$ である．

級数(15)は，各項の絶対値をとってできる級数

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \tag{16}$$

と比較できる．$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leqq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|$ により，(15)の部分和の数列は(16)のそれの収縮である．したがって，(16)が収束すればもとの(15)は収束する．各項の絶対値をとった級数が収束するような級数は**絶対収束**するという．

2.3. 一様収束

同じ集合 E の上で定義された関数の列 $f_n(x)$ を考えよう．E に属するすべての x に対し関数値の数列 $\{f_n(x)\}$ が収束すると仮定すると，極限 $f(x)$ はまた E 上の関数となる．定義により，任意の $\varepsilon > 0$ と

E の点 x に対し番号 n_0 が定まり，$n \geqq n_0$ に対し $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ となるようにできる．しかし，この n_0 は x に関係してきまる．例として，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x=x$$

はすべての x に対して正しいが，$n \geqq n_0$ のとき $|(1+1/n)x-x|=|x|/n<\varepsilon$ となるためには，$n_0>|x|/\varepsilon$ でなければならない．x を固定すればこのような n_0 はとれるが，すべての x に対して同時に同じ n_0 をとるわけにはいかない．

このような場合に，この関数列は点ごとには収束するが一様収束ではないという．はっきり定義しよう：関数列 $\{f_n(x)\}$ が集合 E の上で $f(x)$ に**一様収束**するというのは，任意の $\varepsilon>0$ に対し番号 n_0 がとれ，すべての $n \geqq n_0$ とすべての $x \in E$ に対し $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ がなりたつようにできることである．

一様収束の結果として最も重要なのは次の定理である：

連続関数列の一様収束した極限関数はまた連続である．

関数 $f_n(x)$ はみんな E の上で連続で，E 上で $f(x)$ に一様収束するとしよう．任意の $\varepsilon>0$ に対し番号 n を，任意の $x \in E$ に対し $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/3$ が成立するようにとれる．x_0 を E の点としよう．$f_n(x)$ は x_0 で連続だから $\delta>0$ をとり，$x \in E$ で $|x-x_0|<\delta$ ならば $|f_n(x)-f_n(x_0)|<\varepsilon/3$ をみたすようにできる．同じ条件をみたす x に対し，

$$|f(x)-f(x_0)| \leqq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$$

となり，$f(x)$ が x_0 で連続なことが証明できた．

解析関数論において，点ごとの収束に比べて一様収束がどんなに重要かは，だんだんわかってくるであろう．しかし，関数がもともと定義されている集合の一部分でだけ，収束が一様な場合が多い．

コーシーの必要十分条件は一様収束に対しては次のようになる：

関数列 $\{f_n(x)\}$ が E の上で一様収束するための必要十分条件は，任意の $\varepsilon>0$ に対し番号 n_0 をとり，すべての $m,\ n \geqq n_0$ とすべての $x \in E$ に対し $|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ が成り立つようにできることである．

必要性はこの場合も明らかである．十分性を示す．まずコーシーの判定法

の普通の形から極限関数 $f(x)$ の存在はわかる． 不等式 $|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ において n を止め m を ∞ にしよう． $n\geqq n_0$ とすべての $x\in E$ に対し $|f(x)-f_n(x)|\leqq\varepsilon$ がいえる．ゆえに収束は一様である．

実用のためには次の判定法が最も応用が広い：関数列 $\{f_n(x)\}$ が収束する定数の列 $\{a_n\}$ の収縮になっておれば，$\{f_n(x)\}$ は一様収束である． 仮定は E の上で $|f_m(x)-f_n(x)|\leqq|a_m-a_n|$ が成り立つことであり， 結論はコーシーの条件から直ちにいえる．

級数の場合にはいくぶん弱い形で，この判定法はとくに簡単になる．関数項級数

$$f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots$$

が**優級数**として正項級数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

をもつというのは，定数 M があり十分大きな n に対し $|f_n(x)|\leqq Ma_n$ がなりたつことである．逆に，前者は後者の劣級数であるという． この状況の下では

$$|f_n(x)+f_{n+1}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|\leqq M(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+p})$$

が成り立つ．ゆえに，優級数が収束すれば，劣級数の方は一様収束する． この条件は，しばしば**ワイエルシュトラスの M 判定法**とよばれる． これは絶対収束する級数に対してのみ適用できるという点でいくぶん弱くなっている．収縮をみつける一般的原理はかなり複雑であるが，広い応用範囲をもっている．

問　題

1. 収束する数列は有界であることを証明せよ．
2. $\lim_{n\to\infty} z_n=A$ のとき，$\lim_{n\to\infty}(z_1+z_2+\cdots+z_n)/n=A$ を証明せよ．
3. 絶対収束する級数の和は，級数の項の順序を並べかえてもかわらないことを示せ．
4. 関数列 $\{nz^n\}_1^\infty$ の収束と一様収束を，完全に論ぜよ．
5. x を実数として，次の級数の一様収束を論ぜよ：
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{x}{n(1+nx^2)}\ .$$

6. $U=u_1+u_2+\cdots$, $V=v_1+v_2+\cdots$ を収束級数とするとき，どちらか一方が絶対収束であれば，$UV=u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+(u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1)+\cdots$ となることを証明せよ．（両方とも絶対収束するときは，容易に証明できる．その証明をできるだけ簡単に整理して，一方の絶対収束は不要になるように試みよ.）

2.4. 整級数

整級数とは

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots \tag{17}$$

という形の級数で，係数 a_n と変数 z は複素数とする．もっと一般に，級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

を考えてもよく，これは z_0 を中心とする整級数である．($z-z_0$ の整級数ともいう)．しかし，違いはごくわずかだから形式張ってそうする必要はあまりない．

ほとんど自明な例として，**幾何級数**

$$1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

を考えると，部分和は

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}$$

とかける．$|z|<1$ のとき $z^n\to 0$ であり，$|z|\geqq 1$ ならば $|z^n|\geqq 1$ であるから，$|z|<1$ のとき幾何級数は $1/(1-z)$ に収束し，$|z|\geqq 1$ のときは発散することがわかる．

幾何級数のこの状況は典型的であることがいえる．実際，すべての整級数はある円の中で収束しその円の外では発散する．ただ例外として，整級数が $z=0$ に対してのみ収束したり，あらゆる z に対して収束したりすることはあるが，もっと正確に，アーベルによる次の定理を証明する：

定理 2　各整級数 (17) に対し，次の性質をもつ**収束半径**とよばれる数 R, $0\leqq R\leqq\infty$ が定まる：

(i) $|z|<R$ をみたす各 z に対し級数は絶対収束する．$0\leqq\rho<R$ とすると，$|z|\leqq\rho$ に対し収束は一様である．

(ii) $|z|>R$ のとき，級数の項は非有界となり，したがって級数は発散する．

(iii) $|z|<R$ において，級数の和は解析関数である．導関数は項別微分をしてえられ，項別微分した整級数は同じ収束半径をもつ．

円周 $|z|=R$ を**収束円周**という；この円周上では収束するか発散するか，この定理は何も主張していない．この定理でのべられている R としては，

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \tag{18}$$

にとればよいことも示す．これは，収束半径に対する**アダマールの公式**とよばれている．

$|z|<R$ のとき，$|z|<\rho<R$ に ρ がとれる．すると，$1/\rho>1/R$ であり，上極限の定義から $n\geqq n_0$ ならば $|a_n|^{1/n}<1/\rho$, $|a_n|<1/\rho^n$ となるように，n_0 がとれる．大きい n に対し $|a_nz^n|<(|z|/\rho)^n$ となり，整級数(17)は収束する幾何級数を優級数にもち，したがって収束する．$|z|\leqq\rho<R$ における一様収束を証明するために，ρ' を $\rho<\rho'<R$ にとると，$n\geqq n_0$ のときに $|a_nz^n|\leqq(\rho/\rho')^n$ がいえる．収束する正項級数を優級数にとれたから，ワイエルシュトラスの M判定法により整級数は一様収束である．

$|z|>R$ のときは $R<\rho<|z|$ に ρ をとる．$1/\rho<1/R$ だから，$|a_n|^{1/n}>1/\rho$, $|a_n|>1/\rho^n$ をみたす n が無限にある．ゆえに，無限個の n に対し $|a_nz^n|>(|z|/\rho)^n$ となり，項は非有界である．

項別微分した級数 $\sum_1^\infty na_nz^{n-1}$ は同じ収束半径をもつ．何故なら，$\sqrt[n]{n}\to1$ であるから．証明：$\sqrt[n]{n}=1+\delta_n$ とおく．$\delta_n>0$ であり，二項定理を用いると $n=(1+\delta_n)^n>1+\frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2$ をうる．これから，$\delta_n^2<2/n$ となり，ゆえに $\delta_n\to0$ である．

$|z|<R$ に対し，

$$f(z)=\sum_0^\infty a_nz^n=s_n(z)+R_n(z),$$
$$s_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1},\qquad R_n(z)=\sum_{k=n}^\infty a_kz^k,$$
$$f_1(z)=\sum_1^\infty na_nz^{n-1}=\lim_{n\to\infty}s_n'(z)$$

とおく．$f'(z)=f_1(z)$ を示したい．

$z \neq z_0$, $|z|$, $|z_0| < \rho < R$ として，等式

$$(19) \qquad \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f_1(z_0) = \left(\frac{s_n(z)-s_n(z_0)}{z-z_0} - s_n'(z_0)\right) + (s_n'(z_0) - f_1(z_0)) + \left(\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\right)$$

を考える．最後の項は

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k(z^{k-1} + z^{k-2}z_0 + \cdots + zz_0^{k-2} + z_0^{k-1})$$

と書き直すことができ，

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\right| \leqq \sum_{k=n}^{\infty} k|a_k|\rho^{k-1}$$

をうる．この式の右辺は収束する級数の剰余項である．ゆえに，n_0 をとり $n \geqq n_0$ のときには

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

となるようにできる．$n \geqq n_1$ ならば $|s_n'(z_0) - f_1(z_0)| < \varepsilon/3$ となるように，n_1 がとれる．$n \geqq n_0, n_1$ に n を1つ固定しよう．微分係数の定義から，$\delta > 0$ をとり，$0 < |z-z_0| < \delta$ ならば

$$\left|\frac{s_n(z)-s_n(z_0)}{z-z_0} - s_n'(z_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成立するようにできる．これらの不等式を加えて，(19)から $0 < |z-z_0| < \delta$ のときに

$$\left|\frac{f(z)-fz_0)}{z-z_0} - f_1(z_0)\right| < \varepsilon$$

が成立する．これで $f'(z_0)$ が存在し $f_1(z_0)$ に等しいことがいえた．

項別微分した整級数にまた定理を適用しうるから，実はもっと沢山のことを証明したことになる：収束半径が正の整級数は何回でも微分できる．そして，それらは次の式で具体的に表せる：

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots,$$

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots,$$

$$f''(z) = 2a_2 + 6a_3 z + 12a_4 z^2 + \cdots,$$

……………………………………………………

$$f^{(k)}(z)=k!\,a_k+\frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}z+\frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}z^2+\cdots.$$

特に，最後の式から $a_k=f^{(k)}(0)/k!$ がえられ，整級数は

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n+\cdots$$

となる．これは有名なテイラー・マクローリン展開であるが，ここでは $f(z)$ が整級数展開できることを仮定している．整級数展開がもし存在すれば一意的であることは証明できたが，主な部分，つまり解析関数がいつでもテイラー展開できることは，あとで示す．

問　題

1. m を正整数とする．$(1-z)^{-m}$ を z の整級数に展開せよ．
2. $(2z+3)/(z+1)$ を $z-1$ の整級数に展開せよ．収束半径はいくらか．
3. 次の整級数の収束半径を求めよ：

$$\sum n^p z^n,\ \sum \frac{z^n}{n!},\ \sum n!\,z^n,\ \sum q^{n^2}z^n\quad(|q|<1),\ \sum z^{n!}.$$

4. $\sum a_n z^n$ の収束半径を R とすると，$\sum a_n z^{2n}$, $\sum a_n{}^2 z^n$ の収束半径はいくらか．
5. $f(z)=\sum a_n z^n$ とすると，$\sum n^3 a_n z^n$ は何か．
6. $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ の収束半径をそれぞれ R_1, R_2 としたとき，$\sum a_n b_n z^n$ の収束半径は R_1R_2 以上である．
7. $\lim_{n\to\infty}|a_n|/|a_{n+1}|=R$ のとき，$\sum a_n z^n$ の収束半径は R である．
8. 次の級数は z のどのような値に対し収束するか：

$$\sum_0^\infty\left(\frac{1+z}{z}\right)^n.$$

9. $\displaystyle\sum_0^\infty\frac{z^n}{1+z^{2n}}$ に対し，前問と同じ問に答えよ．

2.5. アーベルの連続性定理

アーベルの２番目の定理として，整級数が収束円周上の点において収束する場合に関するものがある．$R=1$ と仮定し $z=1$ において収束するとして，一般性を失わない．

定理 3　$\sum_0^\infty a_n$ は収束するとし $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ とおく．このとき，z が $|z|<1$ で $|1-z|/(1-|z|)$ が有界であるようにして 1 に近づくならば，$f(z)$ は $f(1)$ に近づく．

注意　幾何的にはこの条件は，実軸上の部分 $(-\infty, 1)$ に関し対称な角領域で 1 を頂点とし角が180°より小さいものの中に z があるということである．**ストルツの角**の中から近づくといういい方をする．

証明　a_0 に定数を必要なら加えて $\sum_0^\infty a_n=0$ としてよい．$s_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$ とかき，等式

$$
\begin{aligned}
s_n(z)&=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n\\
&=s_0+(s_1-s_0)z+\cdots+(s_n-s_{n-1})z^n\\
&=s_0(1-z)+s_1(z-z^2)+\cdots+s_{n-1}(z^{n-1}-z^n)+s_nz^n\\
&=(1-z)(s_0+s_1z+\cdots+s_{n-1}z^{n-1})+s_nz^n
\end{aligned}
$$

を用いる．$s_nz^n\to 0$ だから，次の表現をうる：

$$f(z)=(1-z)\sum_0^\infty s_nz^n.$$

$|1-z|\leqq K(1-|z|)$ と仮定してよく，$s_n\to 0$ である．m を十分大きくとり $n\geqq m$ ならば $|s_n|<\varepsilon$ とする．級数 $\sum s_nz^n$ の $n=m$ から先きの剰余項は幾何級数 $\varepsilon\sum_m^\infty |z|^n=\varepsilon|z|^m/(1-|z|)<\varepsilon/(1-|z|)$ で上から評価される．ゆえに，

$$|f(z)|\leqq|1-z|\left|\sum_0^{m-1} s_kz^k\right|+K\varepsilon$$

をうる．右辺の第 1 項は z を 1 に十分近くとればいくらでも小さくでき，定理にのべた制限のもとで $z\to 1$ とすれば $f(z)\to 0$ となることがいえた．

3．指数関数と三角関数

実数だけで微分積分学をやろうとすると，指数関数 e^x と三角関数 $\cos x$, $\sin x$ の間に関係があるとは思えないだろう．実際，この 2 つは全く異った源から異った目的で導入されていると思う．無論，テイラー展開の間に在る

類似には気がつくであろうし，複素変数を用いることをいとわなければ形式的な等式として**オイラーの公式** $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ を導くこともできよう．しかし，それを完全に解析するには，ガウスの天才を必要とした．

前節でした準備により，複素数 z に対し e^z, $\cos z$, $\sin z$ を定義し，その間の関係を導くことは容易である．同時に指数関数の逆関数として対数関数が定義でき，対数は複素数の偏角の厳密な定義へ通じ，したがって角の幾何学的ではない定義へといたる．

3.1. 指数関数

まず，指数関数を初期条件 $f(0)=1$ をみたす微分方程式

$$f'(z)=f(z) \tag{20}$$

の解として定義しよう．$f(z)$ を整級数

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

$$f'(z)=a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}+\cdots$$

とおき，この微分方程式をとく．(20)をみたすことから $a_{n-1}=na_n$ となり，初期条件から $a_0=1$ である．これから帰納的に求めて $a_n=1/n!$ をうる．

この解を e^z とか $\exp z$ と書く．(どちらを書くかはまったく印刷技術上の問題である.)もちろん，整級数

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \tag{21}$$

が収束することを示さねばならない．$\sqrt[n]{n!}\to\infty$ であるから(証明は読者にまかす)，これは全平面で収束する．

e^z が指数法則

$$e^{a+b}=e^a\cdot e^b \tag{22}$$

をみたすことは，微分方程式からわかる．実際，$D(e^z\cdot e^{c-z})=e^z\cdot e^{c-z}+e^z\cdot(-e^{c-z})=0$ となり，$e^z\cdot e^{c-z}$ は定数である*．$z=0$ とおくと定数の値がわかり，

*) (訳注)　記号の注意：$Df(z)$ は $f(z)$ の導関数 $f'(z)$ のことである．

$e^z \cdot e^{c-z} = e^c$ となる．$z=a, c=a+b$ とおけば(22)である．

注意：$f'(z)$ が恒等的に 0 ならば，$f(z)$ が定数であるということを用いた．このことは，$f(z)$ が全平面で定義されているときは次のようにして確かめられる．$f=u+iv$ とおくと，$\partial u/\partial x=\partial u/\partial y=\partial v/\partial x=\partial v/\partial y=0$ がえられ，実関数のときの定理から，任意の水平直線上で，また任意の垂直直線上で f は定数になる．

指数法則の特別な場合として，$e^z \cdot e^{-z}=1$ をうる．これから，e^z は決して 0 にならないことがわかる．x が実数のとき，級数展開 (21) から $x>0$ なら $e^x>1$ がわかる．e^x と e^{-x} は逆数だから，$x<0$ のときは $0<e^x<1$ である．級数の係数が実数だから，$\exp \bar{z}$ は $\exp z$ の共役複素数である．ゆえに，$|e^{iy}|^2=e^{iy} \cdot e^{-iy}=1$ で，$|e^{x+iy}|=e^x$ となる．

3.2. 三角関数

三角関数は

(23)
$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

で定義される．(21)に代入して次の整級数展開をうる：

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots,$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots.$$

実数の z に対しては，これはよく知られた $\cos x$, $\sin x$ のテイラー展開であるが，大切な違いは，ここでは幾何を用いないでこれらの関数を定義した点である．

(23)からオイラーの公式

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z$$

がえられ，同様に等式

$$\cos^2 z+\sin^2 z=1$$

もえられる．さらに，

$$D\cos z=-\sin z, \quad D\sin z=\cos z$$

もわかる.

加法公式

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$
$$\sin(a+b)=\cos a\sin b+\sin a\cos b$$

は, (23)と指数法則から直ちにえられる.

他の三角関数 $\tan z$, $\cot z$, $\sec z$, $\operatorname{cosec} z$ の重要性は二次的である. これらは $\cos z$ と $\sin z$ で表すことができる. 例えば,

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=-i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$$

となる. 三角関数はすべて e^{iz} の有理関数として表される.

問　題

1. $\sin i$, $\cos i$, $\tan(1+i)$ の値を求めよ.
2. 双曲線関数を $\cosh z=(e^z+e^{-z})/2$, $\sinh z=(e^z-e^{-z})/2$ で定義する. これを $\cos iz$, $\sin iz$ で表せ. 双曲線関数の加法公式を導け. $\cosh 2z$, $\sinh 2z$ を $\cosh z$, $\sinh z$ で表せ.
3. 加法公式を用いて, $\cos(x+iy)$, $\sin(x+iy)$ を実部虚部にわけよ.
4. 次の式を示せ：

$$|\cos z|^2=\sinh^2 y+\cos^2 x=\cosh^2 y-\sin^2 x=(\cosh 2y+\cos 2x)/2,$$
$$|\sin z|^2=\sinh^2 y+\sin^2 x=\cosh^2 y-\cos^2 x=(\cosh 2y-\cos 2x)/2.$$

3.3. 周期性　すべての z に対し $f(z+c)=f(z)$ が成り立つとき, $f(z)$ は**周期** c をもつという. e^z の周期 c は, $e^{z+c}=e^z$, ゆえに $e^c=1$ をみたす. これから $c=i\omega$, ω は実数となることがわかる；むしろ e^{iz} の周期を考えることにし, ω が周期であるという方がよいだろう. 周期が実際に存在して, 正数 ω_0 がありその整数倍の全体が周期の全体になっていることを示そう.

周期の存在を示す方法はいろいろあるがここでは次のようにする：$D\sin y=\cos y\leqq 1$, $\sin 0=0$ より, 積分するか平均値の定理を用いるかして, $y>0$ のとき $\sin y<y$ をうる. 同様にして $y>0$ のとき, $D\cos y=-\sin y>-y$, $\cos 0=1$ より, $\cos y>1-y^2/2$ となり, 順番に $\sin y>y-y^3/6$, $\cos y<1-y^2/2+y^4/24$ をうる. 最後の不等式から $\cos\sqrt{3}<0$ となり, したがって 0 と $\sqrt{3}$ の間に $\cos y_0=0$ をみたす y_0 がある.

$$\cos^2 y_0+\sin^2 y_0=1$$

から，$\sin y_0=\pm 1$ となり，$e^{iy_0}=\pm i$ で，ゆえに $e^{4iy_0}=1$ となる．$4y_0$ は e^{iz} の周期であることがわかった．

本当に，これが最小の正の周期であることを示す．$0<y<y_0$ とすると，$\sin y>y(1-y^2/6)>y/2>0$ となり，$\cos y$ は単調減少関数である．$\sin y$ は正で $\cos^2 y+\sin^2 y=1$ より $\sin y$ は単調増加であることがわかり，$\sin y<\sin y_0=1$ をうる．$0<\sin y<1$ より，e^{iy} は ± 1 でも $\pm i$ でもないことがいえる．ゆえに $e^{4iy}\neq 1$ となり，$4y_0$ が最小の正の周期であることがいえた．$4y_0$ を ω_0 とかくことにする．

さて，任意の周期 ω を考える．$n\omega_0\leqq\omega<(n+1)\omega_0$ をみたす整数 n が存在する．ω が $n\omega_0$ に等しくないとすると，$\omega-n\omega_0$ は正数の周期で ω_0 より小さくなる．これは不可能だから，任意の周期は ω_0 の整数倍になる．

e^{iz} の最小正の周期を 2π とかく．

証明の途中で，

$$e^{\pi i/2}=i,\ e^{\pi i}=-1,\ e^{2\pi i}=1$$

を示した．これらの等式は，2つの数 e と π の間にある本質的な関係をあらわにしている．

y が0から 2π へふえる間に，点 $w=e^{iy}$ は単位円周 $|w|=1$ を正の向きに一周する；つまり，1から $i,\ -1,\ -i$ の順にまわり1にもどる．単位円周 $|w|=1$ 上の各点 w に対し1つだけ $w=e^{iy}$ をみたす y が区間 $0\leqq y<2\pi$ の中にある．これはみんな，$\cos y$ が最初の四分円，つまり0と $\pi/2$ の間で単調減少であるというすでに証明した事からいえる．

代数的にみれば，写像 $w=e^{iy}$ は実数の加法群から絶対値が1の複素数の作る乗法群への準同型写像である．この準同型の核 (kernel) は 2π の整数倍の全体がなす部分群である．

3.4. 対数関数　指数関数とともに，その逆関数を学ぶ必要がある．定義として，$z=\log w$ は方程式 $e^z=w$ の根である．まず，e^z はつねに $\neq 0$ であるから，0の対数は存在しない．$w\neq 0$ のとき，方程式 $e^{x+iy}=w$ は

(24) $$e^x=|w|,\ e^{iy}=w/|w|$$

と同値である．第1の式はただ一つの解 $x=\log|w|$ をもつ；これは正数 $|w|$ の実数の意味での対数である．第2の式の右辺は絶対値が1の複素数であり，したがって，区間 $0\leqq y<2\pi$ の中に1つ，そしてただ一つの解をもつことは今みたところである．さらに，この解に 2π の整数倍を加えた y も第2の式の解になる．0と異なる複素数は，無限個の対数をもち，それらは互いに $2\pi i$ の整数倍だけの差をもつ．

$\log w$ の虚数部を w の**偏角**といい $\arg w$ とかく．それは，正の実軸と0からでて w を通る半直線とのなす角をラジアンで測ったものと，幾何的には解釈できる．この定義から，偏角は 2π の整数倍だけ異なる無限個の値をもち，

$$\log w=\log|w|+i\arg w$$

とかける．記号をかえて，$|z|=r,\ \arg z=\theta$ とおくと，$z=re^{i\theta}$ となる．この記号は非常に便利なので，指数関数がまだ導入されていない段階でも，いつでも用いられている．

便宜上，とくにことわらなければ正数の対数はつねに実数値の対数を意味するものとする．a,b は複素数で $a\neq 0$ のとき，a^b とかけばこれは $\exp(b\log a)$ と同じ意味である．a を正数に限れば $\log a$ は実数としたので a^b はただ一つの値をもつ(一価であるという)．それ以外のときは $\log a$ は複素数の対数であり，a^b は一般には無限個の値をもち(無限多価)，2つの値の比は $e^{2\pi inb}$ である．それが一価になるのは，b が整数のときそのときだけで，このときは a か a^{-1} の累乗として a^b は普通に解釈できる．b が有理数で既約分数でかいて p/q のときは，a^b はちょうど q 個の値をもち，$\sqrt[q]{a^p}$ と表しうる．

指数関数の指数法則から，

$$\log(z_1z_2)=\log z_1+\log z_2$$
$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$$

がえられるが，この式の意味は複素数の無限集合として両辺が等しいということである．左辺の値と右辺の値を比べたいのならば，両者の間に $2\pi i$ (第2式では 2π) の整数倍だけの差があることがいえる．（1章2.1節で述べた

事柄と比較せよ).

最後に，逆余弦関数について，それは方程式

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = w$$

の解である．これは e^{iz} の2次方程式で，根は

$$e^{iz} = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$$

である．ゆえに，

$$z = \arccos w = -i \log (w \pm \sqrt{w^2 - 1})$$

となる．$w + \sqrt{w^2 - 1}$ と $w - \sqrt{w^2 - 1}$ とは逆数なので，これは

$$\arccos w = \pm i \log (w + \sqrt{w^2 - 1})$$

とかける．$\arccos w$ も無限多価であるが，それは $\cos z$ が偶関数であることと周期性とを反映している．逆正弦関数は

$$\arcsin w = \frac{\pi}{2} - \arccos w$$

で定義するのが最も容易である．

複素解析関数論ではこのようにして，初等超越関数はすべて e^z とその逆関数 $\log z$ によって表されるが，これは強調しておく価値がある．いいかえると，初等超越関数は本質的には1つしかないのである．

問　題

1. 実数の y に対し，$\cos y$, $\sin y$ の整級数展開をある項でうち切った残りの剰余は，その剰余の最初の項と同じ符号をもつ．(これは，3·3節の周期性の証明に用いた不等式の一般化である．)

2. $3 < \pi < 2\sqrt{3}$ を証明せよ．

3. $z = -\pi i/2, 3\pi i/4, 2\pi i/3$ に対し，e^z の値を求めよ．

4. e^z が $2, -1, i, -i/2, -1-i, 1+2i$ に等しくなるような，z の値を求めよ．

5. $\exp(e^z)$ の実部，虚部を計算せよ．

6. $2^i, i^i, (-1)^{2i}$ の値をすべて求めよ．

7. z^z の実部，虚部を計算せよ．

8. $\arctan w$ を，log を用いて表せ．

9. 三角形の「角」はどのように定義したらよいか？(それは0と π の間にあるべきだということを念頭におけ．)その定義にもとずいて，角の和が π であることを証明せよ．

10. 方程式 $z^n = a$ の根は，正多角形の頂点をなすことを示せ．

第3章　写像としての解析関数

関数 $w=f(z)$ は点 z に w を対応させる写像とみなしてよい．この章の目的は，解析関数によって定義された写像の特別な性質を，初等的な方法で調べることである．

この計画を実行するために，十分な一般性をもって，基礎となる概念を展開することが望ましい．もしそうしなければ，数多くの特別な定義を，そのお互いの関係もはっきりしないままに，導入することを余儀なくさせられるだろう．今日の学生は非常に早い時期から抽象化と一般化にふれているから，弁解は無用である．むしろ，一般化を可能な限り進めること自身を目的とするべきではないと，警告する方が適当かもしれぬ．

最初の節で，点集合の位相と距離空間について基本的なことを述べる．我々の関心は解析関数の研究に必要となる部分にあるのだから，深く立入る必要はない．これらのことにすでに通じている学生は，用語だけをみてくれればよい．

解析関数の研究に熟達するには，幾何学的な感覚と計算の腕前を必要とすると，著者は信ずる．２節と３節は，１節とは漠然とした関係しかないが，初等的な写像をくわしく調べることにより，幾何学的感覚を啓発するために特に当てられる．同時に，幾何学的考察における厳密さというものを，幾何学的イメージは道案内にはなりえても証明の根拠にはなりえないという点で，強調してみたい．

1．点集合の位相

トポロジーという名でよばれる数学の分野は，直接的にしろ間接的にしろ連続性に関するあらゆる問題に関係している．この言葉は非常に広い意味で

やかましい限定なしに伝統的に用いられている．位相的考察は解析関数の研究の基礎として特に重要であり，またトポロジーの最初の体系的な研究はこの必要を動機としてはじまった．

集合論の基礎論的な問題は別の課程にぞくする．我々の方法は全く素朴であり，適用するのは非常によく知られた対象に限る．この限られた枠組の中では，基礎論的な逆説(パラドックス)は起りえない．

1.1. 集合と要素　我々の用語では，集合とは同一であるか否かが判定できるような対象の集りとし，その対象を要素という．読者は，x が X の要素であることを示す記号 $x \in X$ は知っているだろう．(約束として集合は大文字で，要素は小文字でかく．) 2つの集合が等しいのは，両者が同じ要素からなるとき，そのときに限る．X の各要素がまた Y の要素であるとき，X は Y の部分集合であるといい，$X \subset Y$ または $Y \supset X$ とかく．($X=Y$ であってもかまわない．) 空集合を ϕ とかく．

集合のことを**空間**ということもあり，そのときは要素を**点**という．また，空間の部分集合を点集合という．これは言葉に幾何学的な香りをそえるが，余り字義通りにとるべきではない．例えば，あとで要素が関数である空間を考える場合があるが，そのときには点とは関数のことである．

2つの集合 X, Y の**共通部分** $X \cap Y$ とは，X と Y の両方に同時にぞくする点の全体である．**合併集合** $X \cup Y$ は，X か Y か少くともどちらかにぞくするような点の全体であり，X と Y の両方の点をみな含んでいる．集合の任意の集り(有限個でも無限個でもよい)に対し，もちろん，その共通部分と合併を作ることができる．

集合 X の**補集合**とは，X にぞくさない点の全体からなる集合である．X の補集合を $\sim X$ とかく．補集合は，そのとき考えている全体集合が何かによって変ってくることを，注意しておく．例えば，実数の集合は実数直線に関して一つの補集合をもつし，複素平面に関しては別の補集合をもつ．もっと一般に，$X \subset Y$ のときに相対的補集合 $Y \sim X$ を，Y には入っているが X には入らない点の全体として考える(この記号は $X \subset Y$ のときにのみ用いる

ことにする).

分配法則

$$X\cup(Y\cap Z)=(X\cup Y)\cap(X\cup Z)$$
$$X\cap(Y\cup Z)=(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$$

と，**ド・モルガンの法則**

$$\sim(X\cup Y)=\sim X\cap\sim Y$$
$$\sim(X\cap Y)=\sim X\cup\sim Y$$

とは，おぼえておくと役に立つ．これらは純粋に論理的等式で，集合の任意個数の場合に拡張するのは容易である．

1.2. 距離空間 極限と連続性の考察にあたって，「十分に近い」とか「任意に近い」という言葉に正確な意味をあたえることは本質的である．実数の空間 $\boldsymbol{R}$ と複素数の空間 $\boldsymbol{C}$ においては，量に関する条件 $|x-y|<\varepsilon$ により表現された．例えば，集合 X が y に十分近い点をすべて含むということは，$\varepsilon>0$ が存在し $|x-y|<\varepsilon$ ならば $x\in X$ となっていることである．同様に，X が y に任意に近い点を含むということは，どんな $\varepsilon>0$ をとっても，$x\in X$ で $|x-y|<\varepsilon$ となる x が存在することである．

近さを量的にいい表すために必要なのは，任意の 2 点間の距離 $d(x, y)$ である．集合 S が**距離空間**であるというのは，任意の 2 点 $x\in S, y\in S$ に対し負でない実数 $d(x,y)$ が対応し次の条件をみたしていることである：

1. $d(x,y)=0$ となるのは $x=y$ のとき，そのときだけ,
2. $d(y, x)=d(x,y)$,
3. $d(x, z)\leqq d(x,y)+d(y, z)$.

最後の条件を**三角不等式**という．

例として，$\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{C}$ は $d(x,y)=|x-y|$ として距離空間である．n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ は，実数の n 個の組

$$x=(x_1, \cdots, x_n)$$

の集合で，距離を $d(x,y)^2=\sum_1^n (x_i-y_i)^2$ と定義したものである． 拡張され

た複素平面では距離を

$$d(z, z')=\frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}}$$

と定義した（1章 2.4節）．これはリーマン球面の上へ立体射影をしてそこでのユークリッドの距離を表しているから，三角不等式をみたすことは明らかである．関数空間の例として，区間 $a \leqq x \leqq b$ で定義された連続関数の全体を $C[a, b]$ とおく．$d(f, g)=\max|f(x)-g(x)|$ によって距離を定義すれば，これは距離空間になる．

距離を用いて次の言葉を定義する：任意の $\delta>0$ と $y \in S$ に対し，$d(x, y)<\delta$ をみたす $x \in S$ の全体を $B(y, \delta)$ とかき，中心 y，半径 δ の**球**という．また，それを y の δ-近傍ということもある．近傍を一般的に次のように定義する：

定義 1. 部分集合 $N \subset S$ が1つの球 $B(y, \delta)$ を含むとき，N を **y の近傍**という．

いいかえると，y の近傍とは y に十分近い点をすべて含んだ集合のことである．開集合を定義するのに近傍の概念を使う：

定義 2. 集合がその各要素の近傍になっているとき，**開集合**であるという．

この定義から空集合は開集合であると解釈される（空集合は要素を含まないからこの条件をみたしている）．次の結果は三角不等式から導かれる．

球はすべて開集合である．

実際，$z \in B(y, \delta)$ とすると，$\delta'=\delta-d(z, y)>0$ である．$d(x, z)<\delta'$ とすると，$d(x, y)<\delta'+d(z, y)=\delta$ が三角不等式からえられ，$B(z, \delta') \subset B(y, \delta)$ である．ゆえに，$B(y, \delta)$ は z の近傍であり z は $B(y, \delta)$ の任意の点だから $B(y, \delta)$ が開集合であることがいえた．この点を強調して，球のことを**開球**ということがある．これに対して，$d(x, y) \leqq \delta$ をみたす $x \in S$ の全体を，中心 y，半径 δ の**閉球**という．

複素平面では，$B(z_0, \delta)$ は中心 z_0，半径 δ の**開円板**であり，それは不等式 $|z-z_0|<\delta$ をみたす複素数 z の全体である．これが開集合であることを証明

したが，読者は図をかいてその証明を幾何的に見通してほしい．

開集合の補集合を**閉集合**という．空集合と全空間は開集合でもあり同時に閉集合でもある．他にも同じこのような性質をもつ集合があってもよい．

開集合と閉集合について，次の性質は基本的である：

開集合の有限個の共通部分は開集合である．

開集合の任意個数(無限個でもよい)の合併はまた開集合である．

閉集合の有限個の合併は閉集合である．

閉集合の任意個数(無限個でもよい)の共通部分はまた閉集合である．

証明は容易であるから読者にまかせる．下の2つの命題は，はじめの2つの命題からド・モルガンの法則を用いてえられることに注意しておく．

開集合の概念と直接に関係して普通用いられる多くの言葉がある．全部をあげても混乱するだけだから，**内部**，**閉包**，**境界**，**外部**の4つだけにしよう．

(i)　集合 X の内部 (interior) とは X に含まれる最大の開集合のことである．それは X に含まれるすべての開集合の合併として特徴づけられるから，たしかに存在する．Xを近傍とするような点の全体ということもできる．X の内部を $\mathrm{Int}X$ とかく．

(ii)　Xの閉包 (closure) とは X を含む閉集合の中で最小のものである．或いは，X を含む閉集合すべての共通部分といってもよい．点が X の閉包にぞくするための必要十分条件は，その点の近傍がすべて X と交わることである．閉包は X^- とかく，まれに $\mathrm{Cl}X$ とかくこともある．

(iii)　X の境界 (boundary) とは，閉包から内部を引いた残りである．点が X の境界にぞくするための条件は，その点の近傍がすべて X とも $\sim X$ とも交わることである．記号で，$\mathrm{Bd}X$ または ∂X とかく．

(iv)　X の外部とは，$\sim X$ の内部のことである．閉包の補集合といっても同じである．ゆえに，$\sim X^-$ とかけばよい．

$\mathrm{Int}X\subset X\subset X^-$ となり，X が開集合である必要十分条件は $X=\mathrm{Int}X$, X が閉集合であるための条件は $X=X^-$ である．$X\subset Y$ ならば，$\mathrm{Int}X\subset\mathrm{Int}Y$, $X^-\subset Y^-$ が成り立つ．便宜上，**孤立点**と**集積点**の概念を導入しておく．$x\in X$ が X の孤立点であるというのは，x の近傍で X との共通部分が x だけ

となるようなものがあるときである．X^- の点で X の孤立点でないものを，X の集積点という．x が X の集積点であるための必要十分条件は，x の任意の近傍が X の点を無限個含むことである．

問 題

1. S を距離関数 $d(x,y)$ の距離空間とする．このとき，$\delta(x,y)=d(x,y)/[1+d(x,y)]$ を距離関数として，S はまた距離空間となることを示せ．後者は，2点の距離がある一定の数よりつねに小さいという意味で，有界である．
2. 同じ空間 S に2つの距離関数 $d(x,y)$, $d_1(x,y)$ が与えられていると仮定する．もしそれが同じ開集合を定義するならば，その2つは同値であるという．d と d_1 が同値になるのは，任意の $\varepsilon>0$ と任意の y に対し $\delta>0$ をとり $d(x,y)<\delta$ ならば $d_1(x,y)<\varepsilon$ となるようにでき，かつ，任意の $\varepsilon'>0$ と任意の y に対し $\delta'>0$ をとり $d_1(x,y)<\delta'$ ならば $d(x,y)<\varepsilon'$ となるようにできるときである．これを証明せよ．前問の2つの距離はこの条件をみたすことを確めよ．
3. 定義にもとづいて，$|z-z_0|<\delta$ の閉包が $|z-z_0|\leqq\delta$ になることを示せ．
4. X を，実部と虚部がともに有理数であるような複素数の集合とすると，$\mathrm{Int}X$, X^-, ∂X は何か．
5. 印刷を簡単にするために，$\sim X$ は X' とかかれることがある．この記号を用いて，$X'^{-\prime}$ は X の何か．また，$X^{-\prime-\prime-\prime}=X^{-\prime-\prime}$ を示せ．
6. 集合はそのすべての点が孤立点であるとき，離散集合であるという．$\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$ においては，離散集合は可算であることを示せ．
7. 任意の集合に対し，その集積点全体の集合は閉集合になることを示せ．

1.3. 連結性 距離空間 S の空でない部分集合 E を任意にとると，S の距離関数 $d(x,y)$ をそのまま E に制限して距離関数とし，E を距離空間とみなしうる．E における近傍とか開集合は一般の距離空間と同じに定義されるが，E の開集合は S の部分集合とみて S の開集合になるとは限らない．混乱をさけるために，E の近傍や開集合は相対的近傍，相対的開集合とよばれる．例えば，閉区間 $0\leqq x\leqq 1$ を $\boldsymbol{R}$ の部分空間とみると，半閉区間 $0\leqq x<1$ は相対的開集合であるが $\boldsymbol{R}$ の開集合ではない．今後，部分集合 E がある位相的性質をもつといえば，部分空間としてその性質をもつということであり，その部分空間の位相を**相対位相**という．

直観的にいえば，空間が**連結**というのはそれがただ一つのまとまったもの

でできているということである．しかし，これを近さの言葉で定義しなければ意味がない．もっとも容易なのは，これの否定を特徴づけることである：S が連結でないというのは，$S=A\cup B$ と2つの開集合に分割できることである．ただし，A と B は空集合でなく，互いに交わらないものとする．空間の連結性は，よく次のような形で用いられる：互いに補集合となる S の開集合 A, B が作れたとせよ；S がもし連結なら，A か B か一方は空集合になる．

部分集合 $E\subset S$ が連結というのは相対位相に関して連結なことである．ペダンチックになるかもしれないがくりかえす：

定義 3. 距離空間の部分集合が連結とは，それが空でなく互いに交わらない2つの相対的開集合の合併として表すことができないときである．

E が開集合ならば，E の部分集合が相対的開集合というのはそれ自身が開集合というのと同じである．同様に，E が閉集合なら，相対的閉は閉と同じである．したがって，開集合が連結とはそれを2つの開集合の和に分解することができないことであり，閉集合が連結とはそれを2つの閉集合の和に分解することができないことである．もちろん，その2つは空集合でなく互いに交わらないとしている．

連結集合の自明な例は，空集合と1点だけからなる集合である．

実数直線の場合には，連結集合をみんな書きあげることができる．一番重要なことは，全実数直線が連結であるということで，これは実数の基本的性質の1つである．

次の不等式で定義される4つの型のどれかを**区間**という：$a<x<b$, $a\leqq x<b$, $a<x\leqq b$, $a\leqq x\leqq b$[†]．$a=-\infty$ か $b=+\infty$ のときとして，半無限区間や全直線も含んでいる．

定理 1. 実数直線の空でない連結集合は区間である．

単調数列は有限か無限大かとにかく極限をもつということを根拠として，

†) 開区間 $a<x<b$ を (a, b)，閉区間 $a\leqq x\leqq b$ を $[a, b]$ とかく．ほかに，開区間を $]a, b[$ とかき，半閉区間を $]a, b]$, $[a, b[$ とかくこともある．$a<b$ はつねに仮定する．

古典的な証明を一つあげよう.

実数直線 $\boldsymbol{R}$ が $\boldsymbol{R}=A\cup B$ と共通部分をもたない2つの閉集合の和でかけたとする. 両者ともに空集合でないとすると, $a_1\in A, b_1\in B$ がとれる. $a_1<b_1$ と仮定してよい. 区間 (a_1,b_1) を2等分し, その一方は左端の点が A に右端の点が B に入るから, その区間を (a_2,b_2) とかく, これをくりかえして, 入れ子になった区間 (a_n,b_n) で $a_n\in A, b_n\in B$ をみたすものの列をうる. 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は同じ極限 c をもつ. A と B は閉集合だから c は A と B の共通点である. これは矛盾で、A か B かどちらかは空集合となり, $\boldsymbol{R}$ は連結である.

ほんの少しの変更で, 同様の証明によりすべての区間が連結になることがいえる.

逆を証明する前に重要な注意をしよう. E を R の任意の部分集合とする. すべての $x\in E$ に対し $\alpha\leqq x$ となるとき, α を E の**下界**という. 下界を全部集めた集合 A を考える. A の補集合は明らかに開集合である. A 自身については, A がもし最大数を含まなければ開集合になることが容易にわかる. 直線は連結だから, A と A の補集合がともに開集合なら, 一方は空集合でなければならぬ. ゆえに, 3つの場合が起りうる: A は空集合か, A は最大数を含むか, A は全直線になる. A の最大数 a がもしあれば, a を E の**下限**という; それを, g.l.b.$\{x; x\in E\}$ とか, $\inf\{x; x\in E\}$ とか書く. A が空集合のときは $a=-\infty$ とおき, A が全直線のときは $a=+\infty$ とおくことにする. こうすると, 実数のあらゆる集合は必らず一意的に下限をもつことになる. $a=+\infty$ は明らかに E が空集合のことである. **上限**も同様にして定義でき, それを l.u.b.$\{x; x\in E\}$ または, $\sup\{x; x\in E\}$ と書く[†].

証明にもどり, E は連結集合で E の下限が a 上限が b とする. E の点はすべて a と b の間(a, b も含めて)にある. E に属しない点 ξ が開区間 (a,b) の中にあったとしよう. すると, 開集合 $x<\xi$ と開集合 $x>\xi$ が E をおおい, E は連結だからどちらか一方は E と交わらない. たとえば, ξ の左側には

---

†) 数列の上限は2章2.1節ですでに説明した. (以下訳注) g.l.b. は *greatest lower bound*, l.u.b. は *least upper bound* の略.

E の点がないと仮定せよ．ξ は E の下界となり，a は E の下限ということに矛盾する．その右側に E の点がないとしても同様の矛盾が生じ，結局 ξ は E に属さねばならぬ．ゆえに，E は a と b できまる区間の4つの型のうちのどれかになり証明が終わる．$a=-\infty, b=+\infty$ の場合もこれでよい．

証明の途中で下限と上限の概念を導入した．集合が閉集合で下限上限が有限値とすると，それらはその集合に属してしまい，最小数最大数とよばれる．下限上限が有限値になるのは，集合が空集合でなく有限な下界と有限な上界をもつときである．いいかえると，ある有限区間に含まれることで，このとき，集合は**有界**であるという．これで次の定理がえられた．

定理 2. 実数の有界閉集合は，空集合でなければ，最小数と最大数をもつ．

平面の連結集合の構造は直線の場合のように単純ではない．しかし，連結開集合に対する次の特徴づけが，われわれが必要とする情報のすべてを本質的に含んでいる．

定理 3. 平面内の空でない開集合が連結になるための必要十分条件は，その集合の任意の2点をその集合内の折れ線で結びうることである．

折れ線で結ぶという概念は簡単だからきちんとした定義は省略する*.

まず，必要条件であることを示す．A を連結開集合として，1点 $a\in A$ をとる．A 内の折れ線で a と結びうる A の点の全体を A_1 とし，A_2 をその補集合とする．A_1 と A_2 がともに開集合になることを示す．$a_1\in A_1$ とすると，A に含まれる近傍 $|z-a_1|<\varepsilon$ がとれる．この近傍内の任意の点は a_1 と線分で結ぶことができ，ゆえに a と A 内の折れ線で結びうる．この近傍は A_1 に含まれ，A_1 は開集合となる．次に，$a_2\in A_2$ とし，$|z-a_2|<\varepsilon$ を A に含まれる近傍としよう．もしこの近傍内のある点が a に A 内の折れ線で結べたとすると，その点と a_2 を線分でつなぎ，a_2 が a と折れ線で結べてしまう．これは A_2 の定義に反し，A_2 が開集合であることがいえた．A は連結だから，A_1 か A_2 かは空集合になる．A_1 は点 a を含むから，A_2 が空集合となり，A のすべての点は a と A 内の折れ線で結びうる．A の任意の2

*) (訳注)折れ線とは，有限個の線分をつないでできる曲線．

点は，a を経由して結びうるから，これで条件が必要なことがわかった．

あとで必要になるので注意しておくが，連結開集合 A の任意の2点を，座標軸に平行な A 内の折れ線で結ぶことができる．証明は同様にできる．

十分を証明するために，$A=A_1\cup A_2$ と共通部分をもたず空でない2つの開集合の和として表したと仮定しよう．$a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$ をとると，この2点は仮定により A 内の折れ線で結びうる．折れ線を構成する線分のどれか1つは1端が A_1 に他端が A_2 に入るから，a_1, a_2 が線分で結びうると仮定してよい．その線分は $z=a_1+t(a_2-a_1)$ とかけ，t は区間 $0\leqq t\leqq 1$ を動く．$\{t;\ 0<t<1,\ a_1+t(a_2-a_1)\in A_1\}$, $\{t:\ 0<t<1,\ a_1+t(a_2-a_1)\in A_2\}$ は，区間 $0<t<1$ の開集合で共通部分をもたず空でない．これはこの区間が連結であることに反し，定理の条件が十分であることを示す．

この定理は $\boldsymbol{R}^n$ や $\boldsymbol{C}^n$ のときにも，容易に一般化できる．

定義 4. 空でない連結開集合を**領域**という．

定理3により，全平面，開円板 $|z-a|<\rho$, 半平面などは領域である．$\boldsymbol{R}^n$ の δ-近傍もそうである．領域は開区間の高次元での類似である．領域の閉包を閉領域という．異なる領域が同じ閉包をもちうることを注意しておく．

証明の途中などで，明示的でなく暗示的に定義された集合の構造を解析しなければならないことがよく起る．そんなときに最初にすることは，集合を極大な連結**成分**に分解することである．名前のように，集合の成分とは，それを含むもっと大きな連結部分集合が存在しないような連結部分集合のことである．

定理 4. 任意の集合は，成分の和に一意的に分解できる．

E を与えられた集合とし，点 $a\in E$ をとり，a を含む E の連結部分集合全体の合併を $C(a)$ とかく．1点 a だけの集合は連結だから，$C(a)$ はたしかに a を含む．$C(a)$ が連結であることを示せば，それは極大連結集合で，いいかえれば成分である．さらにそれから，2つの成分は一致するかまたは共通部分をもたないことがわかり，証明は終わる．実際，$c\in C(a)\cap C(b)$ とすると $C(c)$ の定義と $C(a)$ が連結ということから $C(a)\subset C(c)$ となり，同じ理

由から $C(c)\subset C(a)$ もいえて，$C(a)=C(c)$ となる．同様に $C(b)=C(c)$ もいえ，$C(a)=C(b)$ をうる．$C(a)$ を a の成分ということにしよう．

$C(a)$ が連結でないと仮定せよ．すると，相対的開集合 $A, B\neq\phi$ で，$C(a)=A\cup B,\ A\cap B=\phi$ とできる．$a\in A$ としてよい．B から1点 b をとる．$b\in C(a)$ だから，a と b を含む連結集合 $E_0\subset E$ が存在する．$E_0=(E_0\cap A)\cup(E_0\cap B)$ と表すと，これは相対的開集合への分解になっており，$a\in E_0\cap A$，$b\in E_0\cap B$ よりともに空集合でなく，E_0 が連結に反する．これで，$C(a)$ が連結になることがいえた．

定理 5. $\boldsymbol{R}^n$ においては，開集合の成分はまた開集合である．

これは，$\boldsymbol{R}^n$ では δ-近傍が連結であることからいえる．$a\in C(a)\subset E$ を考える．E が開集合なら E はある $B(a,\delta)$ を含み，$B(a,\delta)$ は連結だから $B(a,\delta)\subset C(a)$ となる．ゆえに $C(a)$ は開集合である．もう少し一般に，この定理は**局所連結**な空間に対し成り立つ．局所連結というのは，各点 a の任意の近傍が a の連結近傍を含むときである．証明は読者にまかせよう．

$\boldsymbol{R}^n$ の場合には，成分の個数は可算個であることが示せる．そのために，任意の開集合は有理数を座標にもつ点を含むことに注意する．有理数を座標にもつ点は可算個だから，一列に並べて $\{p_k\}$ とする．各成分 $C(a)$ に対し $p_k\in C(a)$ となる最小の k を対応させる．異なる成分には異なる k が対応し，成分と自然数の部分集合との間に1対1の対応ができて，成分の集合は可算となる．

例として，$\boldsymbol{R}$ の任意の開集合は互いに交わらない可算個の開区間の合併となる．

また，証明を分析することにより，もう少し一般な結果をうる．集合 E が S において**稠密**とは $E^-=S$ となることである．S の中に稠密な可算集合が存在するときに，距離空間 S は**可分**であるという．このとき，次の結果をうる：

局所連結で可分な空間において，任意の開集合は互いに交わらない可算個の領域の合併となる．

問　題

1. $X \subset S$ とする．X の相対的開(閉)集合は，S の開(閉)部分集合と X との共通部分として表せることを示せ．また，そのように表せるものは相対的開(閉)集合である．
2. 2つの領域の合併がまた領域になるための必要十分条件は，共通部分が空でないことである．
3. 連結集合の閉包は連結であることを証明せよ．
4. $A=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2;\ x=0, |y|\leqq 1\}$, $B=\left\{(x,y);\ x>0, y=\sin\dfrac{1}{x}\right\}$ とすると，$A \cup B$ は連結か．
5. $E=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2;\ 0\leqq x\leqq 1$, ある自然数 n に対し $y=1/n$ または $y=0\}$ とする．E の成分は何か．成分はみな閉集合か．また，相対的開集合か．Eは局所連結でないことを確かめよ．
6. 閉集合の成分は閉集合であることを証明せよ．(問3を用いよ．)
7. 孤立点ばかりからなる集合を離散集合という．可分な距離空間では，離散集合は可算であることを示せ．

1.4. コンパクト　数列の収束やコーシー列の概念はもちろん一般の距離空間でも意味がある．実際，$x_n \to x$ とは $d(x_n, x)\to 0$ のことだし，$\{x_n\}$ がコーシー列とは n, m を ∞ に近づけたときに $d(x_n, x_m)\to 0$ となることとする．収束列がコーシー列になることは明らかである．$\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{C}$ に対しては，この逆，つまりコーシー列は収束することを証明した(2章 2.1節)，このことが $\boldsymbol{R}^n$ でも成り立つことを見るのは難しくない．重要性にかんがみて，特別な名前をつけておく．

定義 5. コーシー列が必らず収束するような距離空間は**完備**であるという．

部分集合はそれを部分空間とみて完備なときに，完備であるという．距離空間の完備な部分集合は閉集合であること，完備な距離空間の閉部分集合は完備であること，これを証明するのに読者は苦労しないだろう．

さて，コンパクトというもっと強い概念を導入しよう．コンパクトな空間あるいは集合は完備になるが逆は正しくないという意味で，それは完備よりも強い．実は $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ のコンパクト集合とは有界閉集合にほかならぬことがわかる．このことから，この本の目的のためにはコンパクトという概念を省い

てもよいが，実数あるいは複素数の有界閉集合のもっともいちぢるしい性質に目をとざすことになるので，りこうではない．省いてしまうと，多くの異った場面で本質的には同じである証明を，くりかえさなければならなくなるだろう．

コンパクトの特徴づけは同値なものがいくつかあり，どれを定義にえらぶかは趣味の問題である．どの方法をとっても，初心の読者は，定義の目的がわからないから，いささか困惑を感ずるだろう．最良の道と意見がまとまるのに，まる一世代の数学者を必要としたのだから，これは驚くべきことではない．今日の多数意見では，与えられた集合を開集合でおおう方法に注意を集中するのが一番良い．

開集合の集りがありその合併が X を含むときに，その開集合の集りを集合 X の**開被覆**という．部分被覆とは，その開集合の集りの一部分で合併がやはり X を含むものである．有限被覆とは，開集合の有限個の集りで合併が X を含むもののことである．コンパクトの定義をしよう：

定義 6. 集合 X が**コンパクト**というのは，X の任意の開被覆が有限被覆となる部分被覆をつねに含むことである．

ここで，X は距離空間 S の部分集合であり，被覆は S の開集合によるものである．しかし，U が S の開集合とすると $U\cap X$ は X の開部分集合(相対的開集合)となり，逆に X の開部分集合はこの形で表せる (1.3節問 1)．したがって，全空間に対して定義をしても部分集合に対して定義をしても，ちがいはない．

定義でのべた性質は，しばしばハイネ・ボレルの性質とよばれて引用される．その重要性は，開被覆の言葉で定式化したときに証明が簡単になることが多いという点にある．

まず，コンパクト空間は完備であることを証明する．X をコンパクトとし，$\{x_n\}$ を X のコーシー列としよう．y が $\{x_n\}$ の極限でないとすると，ある $\varepsilon>0$ があり無限個の n に対し $d(x_n,y)>2\varepsilon$ が成り立つ．n_0 を $n_0\leqq m,n$ ならば $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ をみたすようにとる．$d(x_n,y)>2\varepsilon$ となる $n\geqq n_0$ を一つ

とり固定すると，すべての $m \geqq n_0$ に対し，$d(x_m, y) \geqq d(x_n, y) - d(x_m, x_n) > \varepsilon$ となる．ゆえに，ε-近傍 $B(y, \varepsilon)$ は有限個の x_n しか含みえない ($x_n \in B(y, \varepsilon)$ となる番号 n が有限個という方が正確)．

x_n を有限個しか含まない開集合の全体を考える．$\{x_n\}$ がもし収束しないとすると，いま述べたことからこの開集合の集りは X の開被覆になる．したがって，有限部分被覆をもち，それを $U_1, \cdots, U_N$ とする．各 U_i は有限個の x_n しか含みえないから $\{x_n\}$ は有限個になり，これは矛盾である．

次に，コンパクト集合は必らず有界になる(距離空間が有界とは，有限の定数があり任意の2点の距離がその定数以下になること)．これを示すために，1点 x_0 をとり，球 $B(x_0, r)$ を全部考える．これは開被覆であり，X がコンパクトなら有限部分被覆を含む．$X \subset B(x_0, r_1) \cup \cdots \cup B(x_0, r_m)$ となり，これは $r = \max(r_1, \cdots, r_m)$ とおくと $X \subset B(x_0, r)$ というのと同じである．任意の $x, y \in X$ に対し，$d(x, y) \leqq d(x, x_0) + d(y, x_0) < 2r$ となり，X が有界であることが証明できた．

証明できるのは，有界性だけではない．全有界というもっと強い条件を定義しておく．

定義 7. 集合 X が**全有界**というのは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，X が半径 ε の球の有限個でおおえることである．

これは，コンパクト集合に対しては確かに成り立つ．すべての半径 ε の球の集りは開被覆で，コンパクトより X をおおうような有限個が選べるからである．全有界な集合は必らず有界になることがわかる：何故なら，$X \subset B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_m, \varepsilon)$ とすると，X の任意の2点の距離は $< 2\varepsilon + \max d(x_i, x_j)$ となるからである．(コンパクト集合は有界であるという前記の証明は余計なことになった)．

これで次の定理の必要条件の方を証明した：

定理 6. 集合がコンパクトになるための必要十分条件は完備でかつ全有界になることである．

十分を証明するために，距離空間 S が完備で全有界と仮定しよう．開被

覆で有限部分被覆を含まないものがあるとする．$\varepsilon_n=2^{-n}$ とおく．S が有限個の $B(x, \varepsilon_1)$ でおおわれることは仮定している．その有限個の各々が有限部分被覆をもてば S 自身が有限部分被覆をもつことになるから，ある $B(x_1, \varepsilon_1)$ は有限部分被覆をもたない．$B(x_1, \varepsilon_1)$ 自身も全有界だから†，同様にして $x_2 \in B(x_1, \varepsilon_1)$ を $B(x_2, \varepsilon_2)$ が有限部分被覆をもたないようにとれる．この作業を続けて，数列 $\{x_n\}$ を $B(x_n, \varepsilon_n)$ は有限部分被覆をもたず $x_{n+1} \in B(x_n, \varepsilon_n)$ をみたすようにとれる．後者の条件は，$d(x_n, x_{n+1})<\varepsilon_n$ という意味で，$d(x_n, x_{n+p})<\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}+\cdots+\varepsilon_{n+p-1}<2^{-n+1}$ となる．ゆえに，$\{x_n\}$ はコーシー列である．これは極限 y をもち，y は与えられた開被覆の 1 つの開集合 U に含まれる．U は開集合だからある $B(y, \delta)$ を含む．n を大きくとり $d(x_n, y)<\delta/2$, $\varepsilon_n<\delta/2$ とする．$d(x, x_n)<\varepsilon_n$ なら $d(x, y) \leqq d(x, x_n)+d(x_n, y)<\delta$ となり，$B(x_n, \varepsilon_n) \subset B(y, \delta)$ である．ゆえに，$B(x_n, \varepsilon_n) \subset U$ で，$B(x_n, \varepsilon_n)$ は有限部分被覆をもってしまう．これは矛盾で，S がハイネ・ボレルの性質をもつことがいえた．

系　$\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$ の部分集合がコンパクトになる必要十分条件は有界閉集合になることである．

この結果についてはすでにふれた．必要を示すのは容易である：コンパクト集合が有界で完備なことはすでに示した；$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ は完備であり，完備空間の完備な部分集合は閉集合である．逆を示すには，$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ の有界集合は全有界になることをいう必要がある．$\boldsymbol{C}$ の場合をやろう．X が有界とするとある円に含まれ，ゆえに正方形に含まれる．その正方形を一辺の長さが任意に小さい正方形の有限個の和に細分すると，小正方形は半径の小さい円に含まれる．これで X が全有界であることが証明できたが，うまく云い抜けにくい小さな問題点がある．定義 7 を部分集合 $X \subset S$ に適用するときに少しあいまいな点がある．というのは，ε-近傍が X に関するものか S に関するものかが明らかでない．つまり，ε-近傍の中心が X に属することを要求するのかどうかである．しかし，これはたまたま問題にならない．実際，X が ε-

---

†) ここで，全有界集合の部分集合はまた全有界になることを用いた．読者はそれを証明せよ．

近傍でおおわれ，その近傍の中心は必ずしも X に属さないとせよ．近傍が X と交わらないなら無駄だからそれは除いてよい．近傍が X の点を含むなら，その X の点を中心とする 2ε-近傍ではじめの近傍とおきかえ，X の点を中心とする 2ε-近傍の有限被覆をうる．この理由により，あいまいさは見掛けだけのもので，$\boldsymbol{C}$ の有界部分集合が全有界であるというわれわれの証明は正当である．

コンパクト集合の3番目の特徴づけがある．それは集積値という概念を扱う．y が点列 $\{x_n\}$ の集積値というのは，y に収束する部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在することである．点 x_n 全体の集合の集積点とほとんど同じであるが，点列といったときには同じ点がくり返し何回もでてくることがありうることから少しちがう．y が集積値なら，y の任意の近傍は無限に多くの x_n を含む．また，逆もなりたつ．実際，$\varepsilon_k \to 0$ と仮定して，各 $B(y, \varepsilon_k)$ が無限個の x_n を含むとすると，番号 n_k を帰納法で $x_{n_k} \in B(y, \varepsilon_k)$, $n_{k+1} > n_k$ にとれる．このとき，明らかに $\{x_{n_k}\}$ は y に収束する．

定理 7. 距離空間がコンパクトになるための必要十分条件は，任意の無限点列が集積値をもつことである．

この定理は普通ボルツアノ・ワイエルシュトラスの定理とよばれる．もともとの定式化は，複素数の有界数列は収束部分列をもつという形であった．これが解析関数論で果す役割のゆえに，重要な定理として認められるようになった．

必要の証明は前の議論のくり返しである．y が $\{x_n\}$ の集積値でないとすると，y の近傍があり有限個の x_n しか含みえない(これは省略したいい方．x_n が近傍に入るような番号 n が有限個という方が正確)．集積値をもたないなら，x_n を有限個しか含まないような開集合の全体は開被覆になる．コンパクトなら有限部分被覆があり，点列が有限個になってしまい矛盾である．前のときにはこの理由でコンパクト空間が完備であることを証明した．本質的には任意の点列が集積値をもつことを示したのであり，それから集積値をもつコーシー列は必らず収束することをみた．議論を節約するためには定理

6の前に定理7を証明した方がよかったかもしれない．しかし，できるだけ早く，全有界ということの重要さを強調したかったのである．

十分を証明することが残っている．まず，ボルツァノ・ワイエルシュトラスの性質から完備がでてくるのは見易い．実際，集積値をもつコーシー列は収束することを，ちょうど指摘したばかりである．さて，空間が全有界でないと仮定せよ．すると，$\varepsilon>0$ があり，空間は有限個の ε-近傍ではおおえない．点列 $\{x_n\}$ を次のように作る：x_1 は任意にとる．$x_1, \cdots, x_n$ がきまったときに，x_{n+1} を $B(x_1, \varepsilon)\cup\cdots\cup B(x_n, \varepsilon)$ に入らないようにとる．これはいつでも可能である．何故なら ε-近傍の有限個は空間全体をおおわないから．すべての m, n に対し $d(x_n, x_m)>\varepsilon$ だから，$\{x_n\}$ が収束部分列を含まないことは明らかである．これで，ボルツァノ・ワイエルシュトラスの性質から全有界が導かれることがいえた．定理6により証明が終わる．

論理的同値が決して明白ではないコンパクトの3つの特徴づけを示したが，それを読者はよく味わうべきである．この種の結果は，証明をできるだけ簡潔にするために特に有益なことが明らかになるだろう．

問　題

1. 有界な複素数列が収束部分列をもつことの，別証を考えよ．（例えば，下極限を用いる．）

2. ハイネ・ボレルの性質は，次のようにいいかえられることを示せ：共通部分が空である閉集合の集りから，共通部分が空である有限個の閉集合をとりだすことがつねにできる．

3. コンパクトを用いて，実数の有界閉集合は最大数をもつことを証明せよ．

4. $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots$ を空でないコンパクト集合の減少列とすると，共通部分 $\bigcap_1^{\infty} E_n$ は空でない（カントールの補題）．集合が単に閉集合というだけではこれが成り立たないことを例で示せ．

5. 実数列 $x=\{x_n\}$ で有限個だけが $x_n\neq 0$ をみたすようなものの全体を S とする．$d(x, y)=\max|x_n-y_n|$ と定義する．この空間は完備になるか？ δ-近傍は全有界でないことを示せ．

1.5. 連続関数　距離空間 S で定義され別の距離空間 S' に値をとる関数 f を考えよう．関数はまた写像ともよばれる：f は S を S' へ写すといい，

$f: S \to S'$ とかく．もちろん，実数または複素数を主に考えるだろう．時々，拡張された複素平面に値をとることもあるかもしれない．そのときは，距離はリーマン球面上の距離にとる．

空間 S が関数の定義域である．もちろん，関数 f を定義域は S のある部分集合であると考えてもよい．その場合には，定義域を部分空間とみるのである．多くの場合，定義域の違いは見ぬふりをしておくのが安全である：S 上の関数と部分集合へ定義域を制限したものとは普通は同じ記号でかく．$X \subset S$ に対し，$\{f(x); x \in X\}$ を f による X の**像**といい $f(X)$ とかく．$X' \subset S'$ の**原像** $f^{-1}(X')$ とは，$f(x) \in X'$ となるような $x \in S$ の集合である．$f(f^{-1}(X')) \subset X', f^{-1}(f(X)) \supset X$ を確かめよ．

連続関数の定義はほとんど変更する必要はない：f が点 a で連続とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $d(x, a) < \delta$ なら $d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となるような $\delta > 0$ がとれることである．主に，定義域のすべての点で連続な関数を取り扱う．次の特徴づけは定義から直ちにえられる：

関数が連続になるための必要十分条件は，開集合の原像がまた開集合になることである．

関数が連続になるための必要十分条件は，閉集合の原像がまた閉集合になることである．

f が S 全体で定義されていないときには，原像について「開」とか「閉」とかいう言葉は，もちろん f の定義域の相対位相の意味で解するのである．これらの性質は原像についてのみ成り立つのであって，像については成り立たないことをみるのは重要である．例えば，$\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}$ への写像 $f(x) = x^2/(1+x^2)$ の像は $f(\boldsymbol{R}) = \{y; 0 \leqq y < 1\}$ であるが，これは開集合でも閉集合でもない．この例では，$f(\boldsymbol{R})$ が閉集合でないのは $\boldsymbol{R}$ がコンパクトでないからである．実際，次の定理が成り立つ：

定理 8. 連続写像によるコンパクト集合の像はコンパクトで，したがって閉集合である．

f はコンパクト集合 X で定義され連続と仮定しよう．$f(X)$ の開被覆 $\{U_\lambda\}$

を考える．原像$f^{-1}(U_\lambda)$は開集合だから$\{f^{-1}(U_\lambda)\}$はXの開被覆になる．Xはコンパクトだから有限部分被覆$f^{-1}(U_1)\cup\cdots\cup f^{-1}(U_m)\supset X$をえらびうる．$f(X)\subset U_1\cup\cdots\cup U_m$となり，$f(X)$はコンパクトであることが証明できた．

系　コンパクト集合で定義された連続実数値関数は最大値，最小値をとる．

像は$\boldsymbol{R}$の有界閉集合で，最大値，最小値の存在は定理2による．

定理 9.　連続写像による連結集合の像は連結である．

---

fが全空間Sで定義され連続で，$f(S)=S'$と仮定してもよい．$S'=A\cup B$で，A, Bは開集合で交わらないとする．このとき，$S=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$となり，$f^{-1}(A), f^{-1}(B)$は開集合で交わらない．$S$は連結だから$f^{-1}(A)=\phi$か$f^{-1}(B)=\phi$かになり，ゆえに$A=\phi$か$B=\phi$かである．それで，$S'$は連結がいえた．

典型的な応用として次の結果がある：連結集合の上で連続で決して0にならない実数値関数は，つねに正かまたはつねに負である．何故なら，像は連結だから区間になる．正数と負数を共に含む区間は0を含む．

写像$f: S\to S'$が**1対1**というのは，$x\neq y$ならば必ず$f(x)\neq f(y)$となるときである；$f(S)=S'$のとき，**上への**写像という[†]．1対1で上への写像は逆写像f^{-1}をもち，それはS'で定義され，$f^{-1}(f(x))=x$と$f(f^{-1}(x'))=x'$をみたす．この仮定の下で，fとf^{-1}が共に連続のとき，fは**位相写像**とか**位相同型**とかよばれる．集合の性質で位相写像により写した像においても共有しているようなものを，**位相的性質**という．例えば，コンパクトや連結は位相的性質である(定理8，定理9)．ついでながら，開部分集合であるという性質は位相的でないことを指摘するのは有益であろう．$X\subset S$, $Y\subset S'$としXがYに位相同型としても，Xが開集合なら同時にYが開集合になるとは限らない．$S=S'=\boldsymbol{R}^n$のときにはこれは成立するが(領域の不変性)，この定理は深遠でわれわれは必要としない．

一様連続の概念は一定の使途がある．一般に，ある条件が助変数について

[†] この言葉としてぎごちない用語は，1対1は**単射**，上へのは**全射**ともいいかえられる．単射でかつ全射の写像を**全単射**という．

一様性をもつといわれるのは，それがその助変数を含まない不等式で述べられるときである．関数 f が X で**一様連続**とは，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在し，$d(x_1, x_2)<\delta$ をみたす任意の x_1, x_2 に対し $d'(f(x_1), f(x_2))<\varepsilon$ が成りたつことである．強調すべきことは δ が x_1 に無関係にとれるという点である．

定理 10. コンパクト集合上では，連続関数は一様連続である．

証明はハイネ・ボレルの性質の使い方の典型である．f はコンパクト集合 X で連続とする．各 $y\in X$ は $x\in B(y, \rho)$ なら $d'(f(x), f(y))<\varepsilon/2$ となるような近傍 $B(y, \rho)$ をもつ；ここで，ρ は y ごとに違うかもしれない．小さくした球 $B(y, \rho/2)$ による X の開被覆を考える．有限部分被覆 $X\subset B(y_1, \rho_1/2)\cup\cdots\cup B(y_m, \rho_m/2)$ をみつけることができる．$\rho_1/2, \cdots, \rho_m/2$ の最小を δ とおく．$d(x_1, x_2)<\delta$ となる x_1, x_2 を考えよう．$d(x_1, y_k)<\rho_k/2$ となる y_k があり，$d(x_2, y_k)<\rho_k/2+\delta\leqq\rho_k$ をうる．ゆえに，$d'(f(x_1), f(y_k))<\varepsilon/2$, $d'(f(x_2), f(y_k))<\varepsilon/2$ となり，目的の $d'(f(x_1), f(x_2))<\varepsilon$ をうる．

コンパクトでない集合の上では，ある連続関数は一様連続になるが，そうならないものもある．例えば，関数 z は全平面で一様連続であるが，関数 z^2 はそうではない．

問　題

1. 開円板 $|z|<1$ から全平面の上への位相写像を作れ．
2. 開区間と位相同型な実数直線の部分集合は開区間であることを証明せよ．（1点を取り除く影響を考えよ．）
3. S をコンパクト空間とし，$f: S\to S'$ を1対1上への連続写像とすると，f は位相同型になることを証明せよ．（このとき，閉集合は閉集合に写ることを示せ）．
4. 距離空間のコンパクト部分集合 X, Y をとる．$\{d(x, y);\ x\in X, y\in Y\}$ の最小値を与える $x\in X, y\in Y$ が存在することを示せ．
5. 次の関数の中で，全実数直線上一様連続になるのはどれか：$\sin x$, $x\sin x$, $x\sin(x^2)$, $|x|^{1/2}\sin x$.

1.6. 位相空間　近さをいい表すのに距離を用いるのは必要ではないし，いつでも便利というわけでもない．注意深い読者は前節の多くの結果が開集

合を用いて定式化されたことに気付いただろう．開集合の定義に距離を用いたのはその通りだが，こうする強い理由が実際にあるわけではない．開集合を根本のものと考えると決めると，それがみたすべき公理を要請しなければならない．次の公理は**位相空間**の一般に流布している定義となる．

定義 8. 位相空間とは，開集合とよばれる部分集合の集りを指定された集合 T のことである．ただし，次の条件をみたさねばならない：

(i) 空集合 ϕ と全空間 T は開集合である．

(ii) 2つの開集合の共通部分はまた開集合である．

(iii) 開集合の任意の集りの合併はまた開集合である．

これが距離空間の開集合の以前の定義と矛盾しないことは直ちにわかる．(ii)と(iii)は前に強調しておいたし，(i)は自明である．

閉集合は開集合の補集合である．内部，閉包，境界などをどのように定義するかは明らかであろう．近傍は避けることもできるが，どちらかといえば使う方が便利である：N が点 x の近傍とは，$x \in U$, $U \subset N$ となる開集合 U が存在することである．

連結性は純粋に開集合だけで定義された．ゆえに，定義は位相空間でもでき，諸定理はそのままなりたつ．ハイネ・ボレルの性質はまた開集合のみでのべられている．ゆえに，コンパクト位相空間ということも完全に意味がある．しかし，定理6は意味がなくなるし，定理7は成り立たない．

実は，われわれが出会う最初の容易ならぬ困難は収束点列についてである．定義は明らかである：$x_n \to x$ とは，x の任意の近傍が有限個を除いてすべての x_n を含むことである．しかし，$x_n \to x$, $x_n \to y$ としても $x=y$ を証明することができない．この不便な情況を改善するために新しい公理を導入し**ハウスドルフ空間**を定義する．

定義 9. 位相空間は，任意の異なる2点が交わらない近傍をもつとき，ハウスドルフ空間という．

いいかえると，$x \neq y$ ならば $x \in U, y \in V, U \cap V = \phi$ となる開集合 U, V の存在を要求するのである．この条件があれば，収束点列の極限がただ一つ

になるのは明らかである．この本では，ハウスドルフでない位相空間を考えることはまったくないだろう．

距離関数からは導入できない位相の例を与えることは，今はできない．そのような例は複雑でこの本の目的からは離れている．要点は，距離を本当に必要としない情況のときに距離を入れることは不自然だろうという点である．この節をいれた理由は，距離が必ずしも必要ではないと読者に注意することであった．

2. 等 角 性

もとの情勢にもどり，関数や変数は実数か複素数にかぎることにする．距離空間の役割は不相応に小さく思われるだろう：実際に必要なことは，連結とコンパクトの簡単な応用だけである．

この節は説明を主とする．中心は，微分係数の存在の幾何学的意味についてである．

2.1. 曲線と閉曲線　平面の**曲線** γ の方程式は，助変数表示 $x=x(t)$, $y=y(t)$ が一番便利である．ただし，t は区間 $\alpha \leqq t \leqq \beta$ を動き，$x(t), y(t)$ は連続関数とする．複素数を用いて，$z=z(t)=x(t)+iy(t)$ とかくこともできるが，これはいくつかの点で利益がある．曲線 γ を $[\alpha, \beta]$ から平面への連続写像と定義することも慣習になっている．この慣習にしたがうときには，その写像を $z=\gamma(t)$ とかいてもよい．

点集合と考えると，曲線は連続写像による有限閉区間の像である．ゆえに，コンパクトで連結である．しかし，曲線はたんなる点集合ではなく，助変数がふえていくにつれて点がつぎつぎと動くのが本質的である．非減少関数 $t=\varphi(\tau)$ が区間 $\alpha' \leqq \tau \leqq \beta'$ を $\alpha \leqq t \leqq \beta$ の上へ写すとき，$z=z(\varphi(\tau))$ は $z=z(t)$ と同じ点の動きをする．最初の方程式は2番目の方程式から**助変数の変換**によりえられたという．変換が逆をもつのは，$\varphi(\tau)$ が強い意味で増加のとき

である．例えば，$z=t^2+it^4, 0\leqq t\leqq 1$ は $z=t+it^2, 0\leqq t\leqq 1$ から逆をもつ助変数変換によりえられる．助変数の動く区間 $[\alpha, \beta]$ の変更は，$t=a\tau+b, a>0$ という形の助変数の１次変換によりいつでもできる．

論理的にもっとも簡単な方法は，２つの曲線がちがった方程式で与えられていれば，助変数変換で写るかどうかにかかわらず別のものと考えることである．この方法をとるとしても，曲線のある性質が助変数の変換により保たれることを示すことは重要である．例えば，曲線の**始点**と**終点**は助変数の変換を行ったあとでも同じままである．

微分係数 $z'(t)=x'(t)+iy'(t)$ が存在し $\neq 0$ ならば，曲線 γ は**接線**をもちその方向は $\arg z'(t)$ できまる．$z'(t)$ が存在し連続なときに曲線は**微分可能**であるという（連続微分可能といういい方もあるが，不細工すぎる）．さらに $z'(t)\neq 0$ となっているとき，曲線は**正則**であるという．曲線が**区分的に微分可能**とか**区分的に正則**というのは，t の有限個の値を除いて同じ条件が成り立っていることである；その除かれた点では，$z(t)$ は連続で，左側と右側の微分係数をもち $z'(t)$ の左側からと右側からの極限がそれぞれそれに一致し，区分的正則の場合にはさらにその片側からの微分係数も $\neq 0$ と仮定する．

曲線が微分可能または正則という性質は助変数の変換 $t=\varphi(\tau)$ で不変である．ただし，$\varphi'(\tau)$ が連続と仮定し，正則の場合はさらに $\varphi'(\tau)>0$ と仮定した上でのことである．このようなときに，助変数の微分可能な変換，または正則な変換という．

曲線が**単純**である，または**ジョルダン曲線**であるというのは，$z(t_1)=z(t_2)$ が成り立つのが $t_1=t_2$ のときだけという条件をみたすときである．曲線が**閉曲線**というのは両端点が一致すること，すなわち $z(\alpha)=z(\beta)$ となることである．閉曲線に対し助変数の**移動**が次のように定義される：はじめの式を $z=z(t), \alpha\leqq t\leqq\beta$ とすると，区間 (α, β) から t_0 をとり，$t_0\leqq t\leqq\beta$ では $z=z(t)$, $\beta\leqq t\leqq t_0+\beta-\alpha$ では $z=z(t-\beta+\alpha)$ として，新しい閉曲線を定義する．移動の目的は始点を固定せず任意に動かすことである．微分可能または正則な閉曲線，**単純閉曲線**（**ジョルダン閉曲線**）の厳密な定義は明らかであろう．

$z=z(t), \alpha\leqq t\leqq\beta$ の**反対向きの曲線**とは，$z=z(-t), -\beta\leqq t\leqq-\alpha$ のことで

ある．曲線 γ の反対向きの曲線は，前後の関係により $-\gamma$ と書いたり γ^{-1} と書いたりする．定数関数 $z(t)$ は1点からなる曲線を定義する．

円周 C はもともと軌跡 $|z-a|=r$ として定義したが，方程式 $z=a+re^{it}$，$0\leqq t\leqq 2\pi$ による閉曲線と考えることができる．円周というときはいつでも，この標準的な助変数表示を用いることにする．こうしておけば，使う度ごとに式をかかなくてもすむ；また，もっと重要な点であるが，これは C と $-C$ を区別する規則としても役立つ．

2.2. 領域における解析関数　複素平面の集合 A 上で定義された複素数値関数の微分係数

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

を考えるときは，もちろん $z\in A$ で，極限も $z+h\in A$ となるような h に関してとるのである．ゆえに，z が A の内点のときと境界点のときとでは，微分係数の存在も違う意味をもつ．これをさける簡単な方法は，解析関数はいつでも開集合の上で定義することにしてしまえばよい．定義を正式に与えよう：

定義 10． 開集合 Ω 上で定義された複素数値関数 $f(z)$ は，Ω の各点で微分係数をもつときに，Ω で**解析的**であるという．

もっとくわしく，$f(z)$ は**複素解析的**であるということもある．**正則関数**という言葉も，よく使われる同意語である．

開集合 Ω が定義の切り離せない一部分であることを，強調しておかねばならぬ．一般に，それが定義されている開集合 Ω を明確に述べないで解析関数 $f(z)$ ということはさけるべきである．しかし，前後の関係からその集合がはっきりしているときは，規則を破ることもある．何よりもまず，f は関数でなければならないから，f は一価である．Ω' が Ω の開部分集合のとき，$f(z)$ が Ω で解析的ならば f の Ω' への制限は Ω' で解析的になる；ふつう，この制限も同じ記号 f でかく．とくに，開集合の成分は開集合だから，Ω が

連結の場合，つまり領域のときに考えても一般性を失わない．

言葉にもっと融通性をもたせるために，次のように定義を補うことが望ましい：

定義 11*． 関数 $f(z)$ が任意の点集合 A で解析的とは，A を含む開集合で解析的な関数があり，$f(z)$ がその関数の A への制限となっていることである．

この定義は用語の便宜上の規約にすぎない． これは集合 Ω をはっきり云う必要のない例で，Ω のとり方は A を含んでいる限りふつう重要でないからである．Ω を省略するもう一つの例は，“$f(z)$ が点 z_0 で解析的” という云い方である． これは $f(z)$ が z_0 のある近傍で定義されその各点で微分係数をもつことを意味し，その近傍は特定のものである必要はない．

解析関数はすべて1価であるけれども，$\sqrt{z}$, $\log z$, $\arccos z$ などのような多価関数も，ある領域に制限してその関数の1価で解析的な枝を選ぶことができるなら，考えることは可能である．

例えば，Ω として負の実軸 $z\leqq 0$ の補集合をとると，これは開集合で連結である．$\sqrt{z}$ の値で実部が正なのは，Ω で1つそして1つだけである．これをとれば，$w=\sqrt{z}$ は Ω で1価関数になる；連続になることを証明しよう．$z_1, z_2\in\Omega$ での w の値を $w_1=u_1+iv_1$, $w_2=u_2+iv_2$ とする．$u_1, u_2>0$ である．このとき，

$$|z_1-z_2|=|w_1{}^2-w_2{}^2|=|w_1-w_2|\cdot|w_1+w_2|$$

で，$|w_1+w_2|\geqq u_1+u_2>u_1$ となる．ゆえに，

$$|w_1-w_2|<\frac{|z_1-z_2|}{u_1}$$

となり，$w=\sqrt{z}$ は z_1 で連続がいえる． 連続性がいえると， 解析性は逆関数 $z=w^2$ の微分からわかる．すなわち，微分法の記号を用いると $\Delta z\to 0$ なら $\Delta w\to 0$ となる．したがって，

---

*)（訳注）この定義は，$f(z)$ の定義域が明確でない点もあって若干疑問をもつ，$f(z)$ が点集合 A で解析的とは，A を含む開集合 Ω がありf(z) は Ω で定義され解析的なこと，と修正しておく．

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta w\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$$

となり,

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{\frac{dz}{dw}}=\frac{1}{2w}=\frac{1}{2\sqrt{z}}$$

をうる．ここで，$\sqrt{z}$ は同じ枝をとる．

$\log z$ のときも，負の実軸を除いてえられる同じ領域 Ω を用いることができ，条件 $|\mathrm{Im}\log z|<\pi$ により対数の**主値**を定義する．また，連続性を示さねばならぬが，今度は使える代数的等式がなく，もっと一般な論法を用いざるをえない．主値を $w=u+iv=\log z$ とかく．点 $w_1=u_1+iv_1$, $|v_1|<\pi$ と $\varepsilon>0$ を与え，w 平面の集合 $A=\{w=u+iv;\ |w-w_1|\geqq\varepsilon, |v|\leqq\pi, |u-u_1|\leqq\log 2\}$ を考える．これは有界閉集合であり，十分小さい ε に対して空集合ではない．ゆえに，連続関数 $|e^w-e^{w_1}|$ は A 上で最小値 ρ をもつ（定理8系）．A は $w_1+n\cdot 2\pi i$ という点を含まないから，ρ は正数である．$\delta=\min(\rho, e^{u_1}/2)$ とおき，

$$|z_1-z_2|=|e^{w_1}-e^{w_2}|<\delta$$

と仮定する．$w_2\in A$ なら $|e^{w_1}-e^{w_2}|\geqq\rho\geqq\delta$ となり，ゆえに w_2 はこのとき A に入らない．さらに，$u_2<u_1-\log 2$ でもないし，$u_2>u_1+\log 2$ でもない；前者なら $|e^{w_1}-e^{w_2}|\geqq e^{u_1}-e^{u_2}>e^{u_1}/2\geqq\delta$ となるし，後者なら $|e^{w_1}-e^{w_2}|\geqq e^{u_2}-e^{u_1}>e^{u_1}>\delta$ となるからである．ゆえに，w_2 は円 $|w-w_1|<\varepsilon$ に入らねばならず，w が z の連続関数であることが証明できた．連続性がいえると同様にして，微分係数が存在しそれは $1/z$ であることがわかる．

$\arccos z$ の無限に多くある値は $i\log(z+\sqrt{z^2-1})$ の値と同じである．この場合は，2本の半直線 $x\leqq-1, y=0$ と $x\geqq 1, y=0$ の補集合 Ω' に z を制限する．Ω' において $1-z^2$ は実数で $\leqq 0$ となることは決してないから，最初の例のように $\sqrt{1-z^2}$ が定義でき，$\sqrt{z^2-1}=i\sqrt{1-z^2}$ とおく．さらに，Ω' において $z+\sqrt{z^2-1}$ は実数にはならない．実際，$z+\sqrt{z^2-1}$ と $z-\sqrt{z^2-1}$ は逆数だから，z と $\sqrt{z^2-1}$ がともに実数のときだけそれは実数になる；それ

が起るのは z が実軸上の除かれた半直線上にあるときだけである．Ω' は連結だから，Ω' で $z+\sqrt{z^2-1}$ のとりうる値の全体は実軸に関し一方の側に含まれる．i はその値の一つだから，それは上半平面に含まれることがわかる．ゆえに，虚部が 0 と π の間にあるような $\log(z+\sqrt{z^2-1})$ の一価解析的な枝を Ω' で定義することができる．このようにして，Ω' で一価解析関数

$$\arccos z = i\log(z+\sqrt{z^2-1})$$

をうる．その導関数は

$$D\arccos z = i\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

となる．ここで，$\sqrt{1-z^2}$ は実部が正になるようにとる．

領域と 1 価な枝の選び方は一意的ではなく，この例のような方法だけというわけではない．したがって，$\log z$ のような関数を考えるときはそのつど，枝の選び方を明確に記さねばならない．任意の領域で $\log z$ の 1 価解析的な枝をきめることは不可能である．これは重要な事実であり，積分の章で証明する．

2 章1. 2節の結果は領域で解析的な関数に対してもすべて正しい．特に，Ω での解析関数の実部と虚部はコーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

をみたす．逆に，u と v が Ω においてこの方程式をみたしさらに偏導関数が連続ならば，$u+iv$ は Ω において解析関数になる．

Ω における解析関数は退化して定数（関数）になってしまうことがある．そうなるための簡単な条件をいくつか書きあげよう：

定理 11． 領域 Ω で，導関数が恒等的に 0 ならば解析関数は定数になる．また，解析関数の実部，虚部，絶対値，偏角のいずれかが Ω で一定ならば，その解析関数は定数になる．

導関数が 0 ならば，$\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y$ がみな 0 になる．ゆえに，

座標軸に平行な Ω 内の線分の上では u, v は一定となる．1.3節で定理3と関連して，領域内の任意の2点は座標軸に平行な線分からなる折れ線で結べることを注意した．これから，$u+iv$ が定数になることがいえる．

u か v かが定数ならば，

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

となり，$f(z)$ は定数になる．u^2+v^2 が一定ならば，

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

$$u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

をうる．行列式 u^2+v^2 が0でないならば，この連立方程式から $\partial u/\partial x=\partial v/\partial x=0$ をうる．もし1点ででも $u^2+v^2=0$ となれば，u^2+v^2 は恒等的に0で $f(z)$ もそうなってしまう．ゆえに，いずれにしても $f(z)$ は定数である．

最後に，$\arg f(z)$ が一定とすると，(v が恒等的に0でないなら) 実数の定数 k があり $u=kv$ とかける．$u-kv$ が解析関数 $(1+ik)f$ の実部で，これから f が定数になることがいえる．

この定理で，Ω が領域であることが重要である．もしそうでないならば，Ω の各成分の上で $f(z)$ が定数になることがいえるだけである．

問　題

1. $\sqrt{1+z}+\sqrt{1-z}$ の1価な枝を適当な領域で正確に定義し，解析的であることを証明せよ．
2. $\log\log z$ に対し同じことをせよ．
3. 領域 Ω で $f(z)$ は解析的で $|f(z)^2-1|<1$ をみたすとする．このとき，Ω 全体で $\mathrm{Re}\,f(z)>0$ か $\mathrm{Re}\,f(z)<0$ のどちらかであることを示せ．

2.3. 等角写像　方程式 $z=z(t)$, $\alpha\leqq t\leqq\beta$ で表される曲線 γ は領域 Ω に含まれ，$f(z)$ は Ω で連続とする．そのとき，$w=w(t)=f(z(t))$ は w-平面の曲線 γ' を定義し，それを γ の**像**という．

$f(z)$ が Ω で解析的な場合を考えよう．$z'(t)$ が存在すれば $w'(t)$ も存在し，

(1) $$w'(t)=f'(z(t))z'(t)$$

となる．$z'(t_0)\neq 0, f'(z_0)\neq 0$ となる点 $z_0=z(t_0)$ で，この式の意味を考えよう．

まず，$w'(t_0)\neq 0$ がいえる．ゆえに，γ' は $w_0=f(z_0)$ で接線をもち，その方向は

(2) $$\arg w'(t_0)=\arg f'(z_0)+\arg z'(t_0)$$

できまる．この式は，接線には向きをつけて考えて，z_0 での γ の接線と w_0 での γ' の接線との間の角が $\arg f'(z_0)$ に等しいことを示している．ゆえに，これは曲線 γ とは無関係である．したがって，z_0 を通りそこで接線を共有する 2 曲線は，w_0 で接線を共有する 2 曲線に写る．さらに，z_0 である角をなして交わる 2 曲線は，w_0 で大きさばかりでなく向きまでこめて同じ角をなす 2 曲線に写る．この性質にかんがみて，$w=f(z)$ による写像は $f'(z)\neq 0$ となる各点で**等角**であるという．

写像の関連した性質が絶対値 $|f'(z_0)|$ を考察することにより導かれる．

$$\lim_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}=|f'(z_0)|$$

となり，これは z_0 を端点とする微小線分が，極限において比 $|f'(z_0)|$ で縮小あるいは拡大されることを意味している．いいかえると，$w=f(z)$ によって生じる z_0 での長さの拡大率は方向によらない．一般にはこの長さの拡大率はいろいろ変るだろう．

逆に，前記 2 種類の等角性を仮定すれば $f'(z_0)$ の存在がいえることは明らかである．別々に一方だけを仮定しても，なめらかさについて仮定を加えれば，同じ結果がえられるが，これはそんなに明らかではない．

きっちりというと，偏導関数 $\partial f/\partial x$ と $\partial f/\partial y$ が連続と仮定する．このとき，$w(t)=f(z(t))$ の微分係数は

$$w'(t_0)=\frac{\partial f}{\partial x}x'(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}y'(t_0)$$

とかける．ここで，偏微分は z_0 での値である．$z'(t_0)$ を用いて書き直すと，

$$w'(t_0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)z'(t_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overline{z'(t_0)}$$

となる.

角が保たれていると仮定すると, $\arg[w'(t_0)/z'(t_0)]$ は $z'(t_0)$ によらない. したがって,

$$(3)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\overline{z'(t_0)}}{z'(t_0)}$$

は, 一定の偏角をもつことになる. $\arg z'(t_0)$ を変化させると, (3) で表される点は半径 $\frac{1}{2}|(\partial f/\partial x)+i(\partial f/\partial y)|$ の円周を描く. 半径が0でなければこの円周上で偏角は一定でありえないから, ゆえに,

$$(4)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}=-i\frac{\partial f}{\partial y}$$

でなければならぬ. これは, コーシー・リーマンの方程式を複素型でかいたものである.

まったく同様に, 長さの拡大率があらゆる方向で同じと仮定すると, (3) は絶対値が一定となる. 円周の上で絶対値が一定になるのは, 半径が0か中心が原点のときか, そのどちらかである. 前者のときは (4) がえられ, 後者のときは

$$\frac{\partial f}{\partial x}=i\frac{\partial f}{\partial y}$$

がえられる. この方程式は $\overline{f(z)}$ が解析的なことを表している. 0でない微分をもつ解析関数の共役による写像を, **向きをかえる等角写像**という. それは明らかに, 角の大きさを保ち向きを逆にする.

Ω での解析関数 $w=f(z)$ による写像が位相写像ならば, 逆写像 $z=f^{-1}(w)$ も解析的である. これは, $f'(z)\neq 0$ なら容易にわかる. というのは, 逆関数の微分係数は点 $z=f^{-1}(w)$ で $1/f'(z)$ に等しいから. のちに, 解析関数による位相写像のときは $f'(z)$ がけっして0にならないことを証明する.

$f'(z)\neq 0$ ならば, z_0 の十分小さい近傍に制限すれば写像は位相写像になる. これは, 微分法で陰関数の定理とよばれる定理から導かれる. 関数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ の点 z_0 でのヤコビアンは $|f'(z_0)|^2$ に等しく, $\neq 0$ だからである. この重要な定理のもっと簡単な証明を, のちに示すであろう.

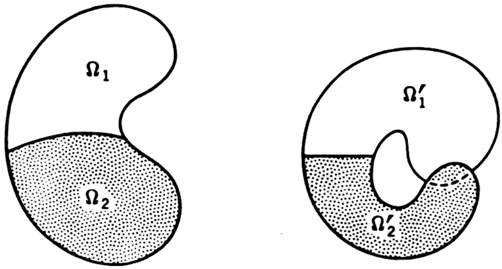


図3-1 二重におおわれた領域

しかし，領域 Ω のすべての点で $f'(z)\neq0$ としても，領域全体で写像が位相写像になるとはかぎらない．例えば，図 3-1 のようなことがおこることもある．写像は部分領域 Ω_1, Ω_2 では 1 対 1 であるがその像は重なっている．全領域の像を部分的に重なり合う透明なフィルムと考えることは有用である．これは，リーマン面と現在よばれている一般の領域を導入するときに，リーマンが用いた単純だが実りの多い考えである．

2.4. 長さと面積

等角写像 $f(z)$ により，点 z での無限小線分の長さが $|f'(z)|$ 倍されることをみた．この拡大率は方向によらず一定だから，無限小面積は明らかに $|f'(z)|^2$ 倍されるであろう．

これを厳密に基礎づけよう．方程式 $z=z(t)=x(t)+iy(t),\ a\leqq t\leqq b$ で与えられる微分可能曲線 γ の長さは

$$L(\gamma)=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt=\int_a^b|z'(t)|dt$$

であることを，積分法で学んでいる．像曲線 γ' は $w=w(t)=f(z(t))$ とかけ，微分は $w'(t)=f'(z(t))z'(t)$ である．ゆえに，その長さは

$$L(\gamma')=\int_a^b|f'(z(t))|\,|z'(t)|dt$$

である．これを，もっと簡単に

$$(5)\qquad L(\gamma)=\int_\gamma|dz|,\quad L(\gamma')=\int_\gamma|f'(z)|\,|dz|$$

と略記するのがふつうである．弧長に関する積分に用いられる記号 ds は，複素数型の記号を用いるときには $|dz|$ とかかれることに注意してほしい．

さて，E を平面の点集合とすると，その面積は2重積分

$$A(E)=\iint_E dxdy$$

によって計算できる．$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が1対1で上への微分可能写像とすると，積分変数変換の公式から像 $E'=f(E)$ の面積は

$$A(E')=\iint_E |u_xv_y-u_yv_x|dxdy$$

によって与えられる．$f(z)$ が E を含む開集合で等角写像とすると，コーシー・リーマンの方程式より $u_xv_y-u_yv_x=|f'(z)|^2$ となり，

$$A(E')=\iint_E |f'(z)|^2dxdy \tag{6}$$

をうる．

公式(5)，(6)は，幾何学的関数論とよばれる複素解析学の分野では重要である．

3．1次変換

解析関数の中で，1位の有理関数は写像としてもっとも単純な性質をもっている．それは拡張された平面からそれ自身の上への写像を定義し，等角写像であり同時に位相写像でもあるからである．1次変換はまた顕著な幾何学的性質をもっていて，そのために，重要性は等角写像の簡単な例という程度をはるかにこえている．読者はこの幾何学的な面に特に注意を払うとよい．そうすれば，簡単であるが非常に価値のある技術が身につくだろう．

3.1．1次変換群　2章1．4節で1次分数変換

$$w=S(z)=\frac{az+b}{cz+d} \tag{7}$$

は，$ad-bc\neq0$ のとき逆変換

$$z=S^{-1}(w)=\frac{dw-b}{-cw+a}$$

をもつことを注意した．特別な値 $S(\infty)=a/c$ と $S(-d/c)=\infty$ は，そういう約束だとしてもよいし，$z\to\infty$ と $z\to-d/c$ に対する極限とみてもよい．後者の解釈で明らかに，位相はリーマン球面の距離で定義して，S は拡張された平面から拡張された平面の上への位相写像になる．

1次変換に対しては $S(z)$ を普通 Sz とかく．(7)式は $ad-bc=1$ のとき正規化されているという．明らかに，任意の1次変換は2つの正規化された表示をもち，一方は他方の係数の符号をすべて変えたものである．

1次変換を表す便利な1つの方法は斉次座標を用いることである．$z=z_1/z_2$, $w=w_1/w_2$ とおくと，

$$\begin{aligned} w_1&=az_1+bz_2 \\ w_2&=cz_1+dz_2 \end{aligned} \tag{8}$$

のとき，$w=Sz$ となる．これは行列でかくと，

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

となる．この表示法の主な利益は，合成変換 $w=S_1S_2z$ が簡単に計算できることである． S_1, S_2 に対応する行列を区別するのに下つきの番号を使うことにすると，S_1S_2 には行列の積

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix}$$

が対応する．

1次変換の全体は群を作る． 実際， 結合法則 $(S_1S_2)S_3=S_1(S_2S_3)$ は任意の変換に対し成り立つし，恒等写像 $w=z$ は1次変換であるし， 1次変換の逆は1次変換である．比 $z_1:z_2\neq0:0$ は複素射影直線の点であり，(8)は1次変換群を普通 $P(1, \boldsymbol{C})$ とかかれる複素数体上の1次元射影変換群と同一視する．正規化された表現だけを用いると，それは行列式が1の2次正方行列

の群（$SL(2, \boldsymbol{C})$ とかく）と同一視できる．ただしこの場合は，符号がちがう2つの行列は同じ1次変換に対応するのでそれは無視する．

もうこれ以上行列の記号は用いないが，ただ，一番簡単な1次変換は

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という形の行列に対応することを注意しておく．最初のは $w=z+\alpha$ で**平行移動**という．2番目は $w=kz$ で，$|k|=1$ のときは**回転**，$k>0$ のときは**相似変換**である．任意の複素数 $k\neq 0$ は $k=|k|\cdot k/|k|$ とかけ，ゆえに $w=kz$ は回転をして次に相似変換をしたものになる．3番目の変換 $w=1/z$ は**反転**とよばれる．

$c\neq 0$ ならば

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{bc-ad}{c^2(z+d/c)}+\frac{a}{c}$$

とかけ，この式から一般の1次変換は，平行移動して，反転して，回転と相似変換をして，それからもう一つ平行移動をする，と分解できる．$c=0$ のときには反転は不要で平行移動も1回でよい．

問　題

1. 実軸に関する対称変換 $z\mapsto\bar{z}$ は1次変換でないことを証明せよ．
2. $$T_1z=\frac{z+2}{z+3},\quad T_2z=\frac{z}{z+1}$$
   のとき，$T_1T_2z, T_2T_1z, T_1^{-1}T_2z$ を求めよ．
3. 原点を動かさず距離をすべて変えない変換のもっとも一般なものは，回転か，回転をして次に実軸に関し対称に写すものか，そのどちらかであることを証明せよ．
4. 実軸を実軸に写す1次変換は，実数を係数とする式でかけることを示せ．

3.2. 非調和比　拡張された平面の相異なる3点 z_2, z_3, z_4 が与えられると，それらをこの順で $1, 0, \infty$ に写す1次変換 S が存在する．はじめの3点に ∞ が入っていないときは，S は

$$Sz=\frac{z-z_3}{z-z_4}:\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4} \tag{9}$$

で与えられる．z_2 か z_3 か z_4 が ∞ のときは，それぞれ

$$\frac{z-z_3}{z-z_4},\ \frac{z_2-z_4}{z-z_4},\ \frac{z-z_3}{z_2-z_3}$$

という形に S はなる．

もし，T が同じ性質をもつ1次変換とすると，ST^{-1} は $1, 0, \infty$ を動かさないことになる．計算を直接して，そのような1次変換は恒等変換だけであることがわかり，これから $S=T$ をうる．つまり，S は一意的に定まる．

定義 12. 非調和比 (z_1, z_2, z_3, z_4) とは，z_2, z_3, z_4 を $1, 0, \infty$ に写す1次変換による z_1 の像のことである．

この定義は z_2, z_3, z_4 が相異なるときだけ意味がある．4点のうち3点が相異なっている時には慣習的に値をきめることはできるが，それは重要ではない．

非調和比は1次変換で不変である．もっと正確に定式化すると，

定理 12. z_1, z_2, z_3, z_4 を拡張された平面の相異なる点とし，T を任意の1次変換とすると，$(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4)=(z_1, z_2, z_3, z_4)$ が成り立つ．

証明は容易である．$Sz=(z, z_2, z_3, z_4)$ とすると，ST^{-1} は Tz_2, Tz_3, Tz_4 を $1, 0, \infty$ に写す．ゆえに，定義により次の式をうる：

$$(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4)=ST^{-1}(Tz_1)=Sz_1=(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

この結果により，与えられた3点 z_1, z_2, z_3 を与えられた3点 w_1, w_2, w_3 にそれぞれ写す1次変換を，直ちに書き下すことができる．実際，対応は

$$(w, w_1, w_2, w_3)=(z, z_1, z_2, z_3)$$

により与えられる．もちろん，一般にはこの式を w について解いておく必要がある．

定理 13. 非調和比 (z_1, z_2, z_3, z_4) が実数になる必要十分条件は，4点が同一円上にあるかまたは同一直線上にあることである．

これは，初等幾何的には明白である．というのは，

$$\arg(z_1, z_2, z_3, z_4) = \arg\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4} - \arg\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$$

となり，4点が同一円上にあれば，点の相対的位置関係により，角のこの差は0か $\pm\pi$ になるからである．

解析的な証明をするには，1次変換による実軸の像は円か直線であることを示せばよい．実際，$Tz=(z, z_2, z_3, z_4)$ が実数になるのは，T^{-1} による実軸の像に z が入っているとき，そのときだけである．

実数 z に対する $w=T^{-1}z$ は $Tw=\overline{Tw}$ をみたす．これを書き下すと，

$$\frac{aw+b}{cw+d} = \frac{\bar{a}\bar{w}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{w}+\bar{d}}$$

となる．分母を払って計算して

$$(a\bar{c}-c\bar{a})|w|^2 + (a\bar{d}-c\bar{b})w + (b\bar{c}-d\bar{a})\bar{w} + b\bar{d}-d\bar{b} = 0$$

をうる．$a\bar{c}-c\bar{a}=0$ のときは $ad-bc\neq0$ より $a\bar{d}-c\bar{b}$ は0にならず，これは直線の方程式である．$a\bar{c}-c\bar{a}\neq0$ ならば両辺をこれでわり，完全平方の式にもっていく．簡単な計算をして

$$\left| w - \frac{\bar{a}d-\bar{c}b}{\bar{a}c-\bar{c}a} \right| = \left| \frac{ad-bc}{\bar{a}c-\bar{c}a} \right|$$

がえられ，これは円の方程式である．

この最後の結果から，1次変換の理論においては円と直線を区別すべきではないことがわかってくる．両者ともリーマン球面上では円に対応するという事実が，両者を区別するべきでないということをさらに正当化する．したがって，これから円という言葉をこの広い意味で使うことにしよう†．

定理12，13の直接の系として次の定理をうる．

定理 14. 1次変換は円を円に写す．

†) この約束は1次変換を扱うときだけ有効である．（以下訳注）円という言葉は，円周の意味にも円の内部の意味にも用いられる．この節では円周をさすことが多い．

問　題

1. $0, i, -i$ を $1, -1, 0$ に写す1次変換を求めよ.
2. 4点の24通りの順列に対する非調和比を, $\lambda=(z_1, z_2, z_3, z_4)$ として, λ で表せ.
3. 円に内接する4辺形の頂点を順に z_1, z_2, z_3, z_4 とするとき,

$$|z_1-z_3|\cdot|z_2-z_4|=|z_1-z_2|\cdot|z_3-z_4|+|z_2-z_3|\cdot|z_1-z_4|$$

を証明せよ. また, この結果を幾何学的に説明せよ.

4. 相異なる4点は1次変換により $1, -1, k, -k$ に写すことができることを示せ. ここで, k の値は点によってきまる. k の値はいくつあるか. またそれらはお互いにどんな関係があるか.

3.3. 対称　z と $\bar{z}$ は実軸に関し対称である. 実数係数の1次変換は実軸を実軸に写し, $z, \bar{z}$ をまた実軸に関し対称な点に写す. もっと一般に, 1次変換 T が実軸を円 C に写すとき, 点 $w=Tz$ と点 $w^*=T\bar{z}$ は C に関し対称であるといいたい. これは, w, w^*, C の間の関係で T にはよらない. 何故なら, 実軸を C に写す別の1次変換を S とすると, $S^{-1}T$ は実数係数の変換となり(3.1節問題4), ゆえに $S^{-1}w=S^{-1}Tz$ と $S^{-1}w^*=S^{-1}T\bar{z}$ はまた共役複素数となる. 対称性はこうして次のように定義する.

定義 13. 点 z と z^* が円 C に関し対称とは, 円 C 上の任意の相異なる3点 z_1, z_2, z_3 に対し $(z^*, z_1, z_2, z_3)=\overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$ が成り立つことである.

C 上の点だけは自分自身に対称である. z を z^* に写す写像は1対1対応となり, C に関する**鏡像**という. 鏡像を2回つづけると, それは1次変換になることは明らかであろう.

対称の幾何学的意味を調べたい. まず, C が直線としよう. $z_3=\infty$ とすることができ, そのときは対称の条件は

$$\frac{z^*-z_2}{z_1-z_2}=\frac{\bar{z}-\bar{z}_2}{\bar{z}_1-\bar{z}_2} \tag{10}$$

となる. 絶対値をとると, $|z^*-z_2|=|z-z_2|$ をうる. z_2 は C 上任意にとれるから, z と z^* は C 上のすべての点から等距離にあることがわかった. さらに, (10)から

$$\mathrm{Im}\frac{z^*-z_2}{z_1-z_2}=-\mathrm{Im}\frac{z-z_2}{z_1-z_2}$$

がえられ，z と z^* は C できまる2つの半平面にそれぞれ別れて入っている[†]．これで，C は z と z^* を結ぶ線分の垂直2等分線になることがいえるが，証明は読者にまかせよう．

次に，C が中心 a，半径 R の円の場合を考えよう．非調和比の1次変換による不変性を用いて次の計算ができる：

$$\begin{aligned}\overline{(z, z_1, z_2, z_3)}&=\overline{(z-a, z_1-a, z_2-a, z_3-a)}\\&=\left(\bar{z}-\bar{a}, \frac{R^2}{z_1-a}, \frac{R^2}{z_2-a}, \frac{R^2}{z_3-a}\right)\\&=\left(\frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}}, z_1-a, z_2-a, z_3-a\right)=\left(\frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}}+a, z_1, z_2, z_3\right)\end{aligned}$$

これから，z の対称点 z^* は，$z^*=R^2/(\bar{z}-\bar{a})+a$ となり，z と z^* は関係式

$$(z^*-a)(\bar{z}-\bar{a})=R^2 \tag{11}$$

をみたす．ゆえに，中心からの距離の積 $|z^*-a|\cdot|z-a|$ は R^2 に等しい．さらに，比 $(z^*-a)/(z-a)$ は正だから，z と z^* は a から出る同1半直線上にのっている．これで，z の対称点は簡単に作図できる（図3-2）．中心 a の対称点は ∞ であることを注意しておく．

定理 15.（対称の原理）1次変換が円 C_1 を円 C_2 に写すときそれは C_1 に関し対称な2点を C_2 に関し対称な2点に写す．

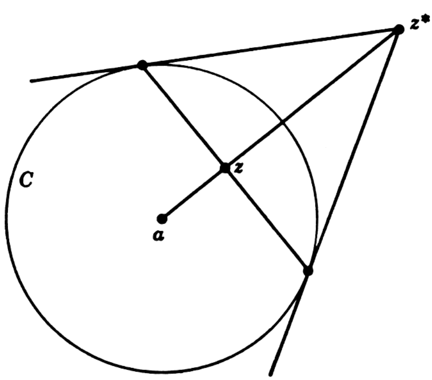


図3-2　円に関する鏡像

簡単にいえば，1次変換は対称性を保存する．C_1 か C_2 が実軸ならばこの原理は対称の定義からえられる．一般のときには

†) $z=z^*$ で C 上にあるときは除く．

補助の1次変換を用いて C_1 を実軸に写しておけばよい.

対称の原理を用いる2つの方法がある. ある1次変換による z と C の像が分っているとき, この原理により z^* の像が分る. 他方は, z と z^* の像が分っているとき, C の像はこれらの像の対称軸でなければならない. これは C の像を決定するには不十分だけれども, えられる情報は価値が高い.

対称の原理は, 円 C を円 C' に写す1次変換をみつける問題に実用される. C 上の3点 z_1, z_2, z_3 が C' 上の3点 w_1, w_2, w_3 に写すことを要請すれば, それでいつでもその変換はきまる; つまり $(w, w_1, w_2, w_3)=(z, z_1, z_2, z_3)$ である. しかし, C 上の点 z_1 が C' 上の点 w_1 に写り, C の上にない点 z_2 が C' の上にない点 w_2 に写るという条件を与えても, その1次変換はきまってしまう. $z_2{}^*$(C に関する z_2 の対称点)は $w_2{}^*$ (C' に関する w_2 の対称点)に写らねばならず, ゆえに, $(w, w_1, w_2, w_2{}^*)=(z, z_1, z_2, z_2^*)$ から変換はえられる.

問　題

1. 鏡像は円を円に写すことを証明せよ.
2. 虚軸, 直線 $x=y$, 円 $|z|=1$ を, 円 $|z-2|=1$ に関して鏡像せよ.
3. 前問の鏡像を幾何学的に行え.
4. 円 $|z|=2$ を円 $|z+1|=1$ に写し, -2 を原点に, 原点を i に写す1次変換をみつけよ.
5. 円 $|z|=R$ を自身の上に写す1次変換の一般形を求めよ.
6. 1次変換が2つの同心円をまた同心円に写すとする. そのとき, 半径の比が変わらないことを証明せよ.
7. $|z|=1$ と $\left|z-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$ を同心円に写す1次変換を求めよ. 半径の比はどうなるか.
8. $|z|=1$ と $x=2$ に対し前問と同じ問に答えよ.

3.4. 向きづけられた円

$S(z)$ は解析的で

$$S'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0$$

だから, $z\neq -d/c, \infty$ のとき $w=S(z)$ は等角写像である. したがって, 交わっている2つの円は同じ角で交わる2つの円に写る. しかも, 角の向きま

で保たれる．直観的にみれば，これは右と左が保たれるということであるが，もっときちんと定式化することが望ましい．

円 C の向きは C 上の順番のついた3点 z_1, z_2, z_3 で定まる．C の上にない点 z は，$\mathrm{Im}(z, z_1, z_2, z_3)>0$ のときこの向きに関し C の右側にあるということにし，$\mathrm{Im}(z, z_1, z_2, z_3)<0$ のとき C の左側にあるという(これは，$(i, 1, 0, \infty)=i$ なので普通の使い方と合う)． 向きは2つしかないことを示すのが重要である．この意味は，左側と右側の区別は円上の3点をどのようにとっても同じということである（左右は逆になるかもしれない)．非調和比は不変だから，C が実軸の場合に考えれば十分である．そうすると，

$$(z, z_1, z_2, z_3)=\frac{az+b}{cz+d}$$

は実数係数で書くことができ，簡単な計算で

$$\mathrm{Im}(z, z_1, z_2, z_3)=\frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}\,z$$

となる．これで，右側と左側の区別は上半平面と下半平面の区別と同じであることが認められる．どちらがどちらかは，行列式 $ad-bc$ の符号による．

1次変換 S は向きのついた円 C を円に写すが，その像の円は Sz_1, Sz_2, Sz_3 で向きづける．このとき非調和比の不変性から，C の左側，右側はそれぞれ像の円の左側，右側に写ることがいえる．

2つの円が互いに接しているときには，向きを比べることができる．実際，1次変換を用いて共通点を∞に写す．2つの円は平行な2直線となり，平行な直線の向きを比べる方法は知っている．

円の向き z_1, z_2, z_3 を図示するのには，z_1 から z_2 を通って z_3 の方向へ矢印を書けばよい．座標系をいつものようにとっておけば，左側，右側はこの矢印に関して普通の意味になる．

有限平面を拡張された平面の部分と考えれば，無限遠点は特別である．したがって有限なすべての円に対し絶対的な正の向きをきめることができ，それは∞が右側にあるようにきめる．左側にある点の全体を円の内部といい，右側の点の全体を円の外部という．

問 題

1. z_1, z_2, z_3, z_4 を同一円上の点とする． z_1, z_3, z_4 と z_2, z_3, z_4 が同じ向きをきめるための必要十分条件は $(z_1, z_2, z_3, z_4)>0$ であることを示せ．
2. 円の接線は接点を通る直径に直交することを示せ（接線は，円と1点だけを共有する直線と定義する）．
3. 円 $|z-a|=R$ の内部は，$|z-a|<R$ をみたす z の全体であることを確かめよ．
4. 2つの向きのついた円があるとして，交点でのその円の間の角を，交点での接線に同じ向きをつけて，接線の間の角として定義する．2つの交点での角が大きさは同じで向きが逆になることを，幾何学的というよりは解析的に証明せよ．

3.5. 円の族

1次変換の様子が目に見えるようにするために，円座標系の座標直線と考えてもよい円の族を導入する．これは大いに役立つであろう．

1次変換

$$w=k\frac{z-a}{z-b}$$

を考える．$z=a$ は $w=0$ に写り，$z=b$ は $w=\infty$ に写る．ゆえに，w-平面の原点を通る直線は a と b を通る円の像である．他方，原点を中心とする同心円 $|w|=\rho$ は，

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right|=\frac{\rho}{|k|}$$

で定義される円の像である．これは a, b を極限点とする**アポロニウスの円**である．つまり，a と b からの距離の比が一定な点の軌跡である．

a, b を通る円を C_1 とかき，この2点を極限点とするアポロニウスの円を C_2 とかく．このような円 C_1, C_2 の全部が作る図形(図3-3)を，a と b できまる**円の網**とか**シュタイナーの円**とかいう．これはいろいろ面白い性質をもっているが，そのいくつかを書き上げよう：

1. 極限点を除き，平面の任意の点に対しそこを通る C_1 と C_2 がただ一つある．

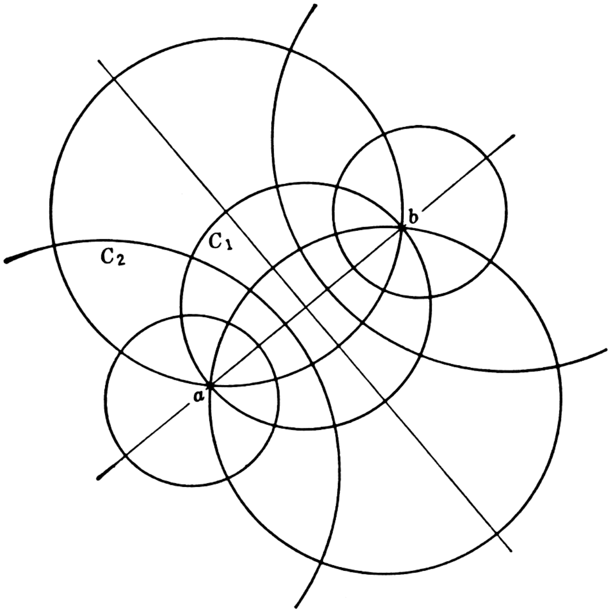


図3-3　シュタイナーの円

2. 各 C_1 と各 C_2 は直交する.

3. 一つの C_1 に関する鏡像は, 各 C_2 を自分自身へ写し, 各 C_1 を他の C_1 へ写す. 一つの C_2 に関する鏡像は, 各 C_1 を自分自身へ写し, 各 C_2 を他の C_2 へ写す.

4. 2つの極限点は各 C_2 に関し対称である. しかし, 他のどのような円に関しても対称ではない.

これらの性質は, 極限点が0と∞のとき, すなわち C_1 が原点を通る直線で C_2 が同心円のときには明らかである. これらは1次変換で不変だから, 一般のときも成り立つ.

変換 $w=Tz$ が a, b を a', b' に写すとき, T は

$$\frac{w-a'}{w-b'}=k\cdot\frac{z-a}{z-b} \tag{12}$$

の形で書くことができる. 明らかに, T は円 C_1 と C_2 をそれぞれ a', b' を極限点とする円 C_1' と C_2' に写す.

事態は $a'=a, b'=b$ ならば特に簡単になる．このとき，a,b を T の**不動点**であるといい．z と Tz を同じ平面上に表わすと便利である．この情況のもとで，円の網の全体は自身の上に写される．k の値は像の円 C_1' や C_2' を同一視するのに役立つ．実際，適当に向きをつけると，C_1 とその像 C_1' のなす角は $\arg k$ であり，C_2 の像 C_2' の極限点 a,b からの距離の一定の比と C_2 のその一定の比との商が $|k|$ である．

すべての C_1 かあるいはすべての C_2 がそれぞれ自分自身の上へ写るという特別な場合が，とりわけ重要である．$k>0$ ならばすべての C_1 に対し $C_1'=C_1$ となる ($k<0$ のときは，C_1 は C_1 に写るが向きが逆になってしまう)．このような変換を**双曲型**という．k を大きくしていくと，点 $Tz, z\neq a,b,$ は C_1 にそって b の方へ流れていく．この流れの考察は双曲型変換の見やすい映像を与えるだろう．

$|k|=1$ のときに $C_2'=C_2$ の場合が起る．このとき，変換を**楕円型**という．$\arg k$ を変化させると Tz は円 C_2 にそって動く．対応する流れは a と b のまわりを異なる方向にまわる．

2つの不動点をもつ一般な1次変換は，同じ不動点をもつ双曲型変換と楕円型変換の合成である．

1次変換の不動点は，方程式

$$z=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \tag{13}$$

を解いて求まる．一般には，これは2次方程式で2根をもつ；$\gamma=0$ のときは不動点の1つは ∞ である．しかし，2根が重なってしまうことは起る．不動点が1つしかない1次変換を**放物型**という．こうなるための条件は，$(\alpha-\delta)^2=-4\beta\gamma$ である．

方程式(13)が相異なる2根 a,b をもつときは，その1次変換は

$$\frac{w-a}{w-b}=k\frac{z-a}{z-b}$$

という形でかける．このときは変換を調べるのに，a と b できまるシュタイナーの円を用いることができる．しかし，重要なことではあるが，この方法

はこの場合に限られたものでは決してない．どんな1次変換でも任意の a, b を用いて(12)の形に書くことができ，2つの円の網を用いて大きな利益がある．

放物型変換を調べるために,別の型の円の網を考えることは望ましい.変換

$$w=\frac{\omega}{z-a}+c$$

を考える．w-平面の直線には a を通る円が対応することは明らかである；さらに，平行な直線には a で互いに接する円が対応する．とくに $w=u+iv$ とすると，直線の族 $u=$一定と直線の族 $v=$一定にそれぞれ互いに接する円の族が対応し，その2つの円の族は直交する(図3-4)．この図形はシュタイナーの円の退化したものと考えられる．それは点 a と円の一つの族の接線によりきまる．直線 $v=$一定の像を C_1 とかき，もう一方の族の円を C_2 と書くことにしよう．明らかに，直線 $v=\mathrm{Im}\,c$ が円 C_1 の接線に対応する；そしてその方向は $\arg\omega$ である．

a を a' に写す任意の1次変換は

$$\frac{\omega'}{w-a'}=\frac{\omega}{z-a}+c$$

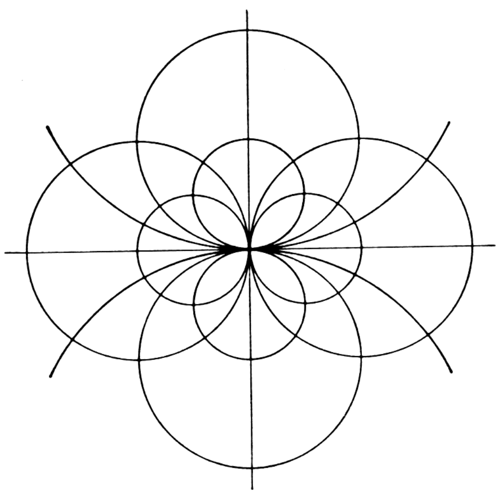


図3-4　退化したシュタイナーの円

の形でかける．明らかに，円 C_1 と C_2 は a' と ω' できまる円 C_1' と C_2' に写る．今，$a=a'$ と仮定しそれが唯一の不動点とする．このときは $\omega=\omega'$ で，

$$\frac{\omega}{w-a}=\frac{\omega}{z-a}+c \tag{14}$$

と書くことができる．この変換により，円 C_1 と C_2 とでできた退化したシュタイナーの円は自身の上に写される．(14)の両辺を定数倍することは自由だから，c は実数と仮定することができる．そのとき，各 C_1 は自分自身の上に写り，この放物型変換は円 C_2 にそう流れと考えることができる．双曲型でも楕円型でも放物型でもない1次変換は**斜航型**変換という．

問　題

1. 次の1次変換の不動点を求めよ．

$$w=\frac{z}{2z-1},\ w=\frac{2z}{3z-1},\ w=\frac{3z-4}{z-1},\ w=\frac{z}{2-z}.$$

これらの中で，楕円型，双曲型，放物型なのはどれか．

2. 変換

$$Sz=\frac{az+b}{cz+d}$$

の係数が $ad-bc=1$ と正規化されているとする．S が楕円型になる必要十分条件は $-2<a+d<2$, 放物型になるのは，$a+d=\pm 2$, 双曲型になるのは $a+d<-2$ または >2 のときであることを示せ．

3. ある整数 n に対し $S^n z=z$ となるならば，1次変換 S は楕円型であることを示せ．

4. S が双曲型か斜航型のとき，すべての z に対し $n\to\infty$ のとき $S^n z$ は1つの不動点に収束することを示せ．ただし，z がもう1つの不動点のときだけは除く．

5. リーマン球面の回転をあらわす1次変換をすべて求めよ．

6. $|z|=1$ と $|z-1|=4$ の両方に直交する円をすべて求めよ．

7. 正確にはいわなくてよいが，明らかに，1次変換の族はいくつか実数の助変数を含んでいる．1次変換の全部からなる族は何個の実助変数を含むか．双曲型の族，楕円型の族，放物型の族のときはそれぞれ何個か．与えられた円 C を動かさない1次変換の族は何個か．

4. 基本的な等角写像

解析関数がひきおこす等角写像はその関数の性質を目によく見えるようにする；実関数がそのグラフによって目に見えるようになるのと比べてよい．したがって等角写像に関連したあらゆる問題が多大の注目を受けてきたのは当然である；この方面の進歩が解析関数のわれわれの知識を随分ふやした．さらに等角写像は数理物理学の多くの分野に自然に登場し，それで複素関数論の直接の有用さの説明となる．

もっとも重要な問題の一つはある領域から他の領域への等角写像を決めることである．この節では，初等関数で定義される写像を考えよう．

4.1. 等高線の使用　等角写像が具体的な解析関数 $w=f(z)$ で定義されているとき，その写像の特有な幾何学的性質について情報を得たいと望むのは自然である．もっとも実り多い方法の一つは，その点の変換によって生ずる曲線の対応を調べることである．ある単純な曲線族がよく知られた性格をもつ曲線族に写されるという事実の中に，関数 $f(z)$ の特別な性質が表現される．そのような情報は何でも，写像の視覚的概念作用を強めるだろう．

1次変換による写像の場合もそうであった．3節で，直線も特別な場合として円に含めることにして，1次変換は円を円に写すことを証明した．シュタイナーの円を考察することにより，対応の完全な絵を画くことができた．

一般の場合には，直線 $x=x_0$ と $y=y_0$ の像の曲線を調べることからはじめるとよい．$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ と書くと，$x=x_0$ の像は助変数表示で $u=u(x_0,y),\ v=v(x_0,y)$ とかける；y は助変数で，どちらが便利か場合によって消去してもよいしそのままにしておいてもよい．$y=y_0$ の像も同様にきめられる．いっしょにあわせて，その曲線の族は w-平面で直交した網を作る．同様に，z-平面において曲線 $u(x,y)=u_0$ と曲線 $v(x,y)=v_0$ を考えてもよい．それらはまた直交し，u と v の**等高線**とよばれる．

場合により，極座標を用いて，原点中心の同心円と原点を通る直線の像を調べた方が都合のよいこともあろう．

簡単な写像に，累乗 $w=z^\alpha$ がある．α が実数の場合だけ考えることにすると，α が正数と仮定してよい．

$$|w|=|z|^\alpha,\quad \arg w=\alpha\arg z$$

であるから，原点中心の同心円の族は同じ族に写り，原点から出る半直線はやはり他の原点から出る半直線に写る．$z\neq 0$ の点では写像は等角であり，原点での角 θ は角 $\alpha\theta$ に写される．$\alpha\neq 1$ のときは，全平面で考えると写像は1対1ではないし，α が分数なら1価でさえもない．したがって一般には，この写像はある角領域を他の角領域の上へ写す写像としてのみ考えられる．

$0<\varphi_2-\varphi_1\leqq 2\pi$ として，角領域 $S(\varphi_1,\varphi_2)$ は $\arg z$ の1つの値が

$$\varphi_1<\arg z<\varphi_2 \tag{15}$$

をみたすような点 $z\neq 0$ の集合である．すぐにわかるように，$S(\varphi_1,\varphi_2)$ は領域である．この領域では，$w=z^\alpha$ の値が一意的に，$\arg z$ の値は(15)をみたすようにとり，

$$\arg w=\alpha\arg z$$

とおいて定義できる．この関数は解析的で，導関数

$$De^{\alpha\log z}=\alpha\frac{w}{z}$$

は決して0にならない．$\alpha(\varphi_2-\varphi_1)\leqq 2\pi$ のときだけ写像は1対1で，このとき $S(\varphi_1,\varphi_2)$ は w-平面の角領域 $S(\alpha\varphi_1,\alpha\varphi_2)$ の上へ写る．$S(\varphi_1+n\cdot 2\pi,\ \varphi_2+n\cdot 2\pi)$ は点集合としては $S(\varphi_1,\varphi_2)$ と同じであるが，z^α の枝は異なって決められていることを注意すべきである．

写像 $w=z^2$ を詳しく調べよう．$u=x^2-y^2, v=2xy$ だから，等高線 $u=u_0$ と $v=v_0$ とは直角双曲線で，その漸近線は $y=\pm x$ と，座標軸である．もちろん，これらは互いに直交している．一方，$x=x_0$ の像は $v^2=4x_0^2(x_0^2-u)$ で，$y=y_0$ の像は $v^2=4y_0^2(y_0^2+u)$ である．どちらも放物線であり原点を焦点にもち，軸は u 軸の負と正の方向である．その2つの族の直交性は解析幾何ではよく知られている．等高線の族の図を，図3-5と図3-6に示す．

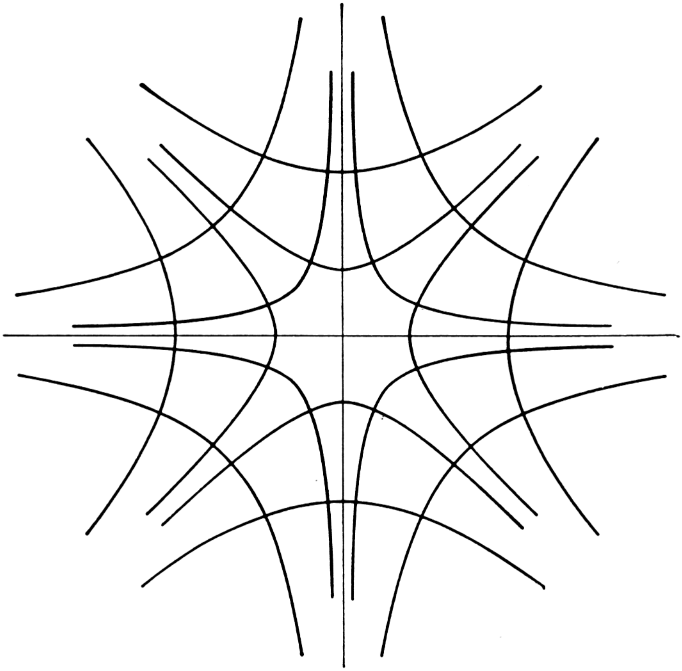


図3-5　z-平　面

像曲線の別の族として，円 $|w-1|=k$ を考える．その原像の方程式は

$$(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)+k^2-1$$

と書け，これは焦点が ±1 のレムニスケートの族を表す．これに直交する曲線の族は

$$x^2-y^2=2hxy+1$$

で表され，原点を中心とし ±1 を通る直角双曲線である．

3次関数 $w=z^3$ の場合には等高線は両平面とも3次曲線になる． その形は計算をしないでもわかるから，その方程式を求めてもしかたがない．例えば，曲線 $u=u_0>0$ は図3-7のような形になる．同様に，z が直線 $x=x_0>0$ の上を動くときの $\arg w$ の変化を追うと， 像の曲線はループをもつことがわかる(図3-8)．これはデカルトの葉線である．

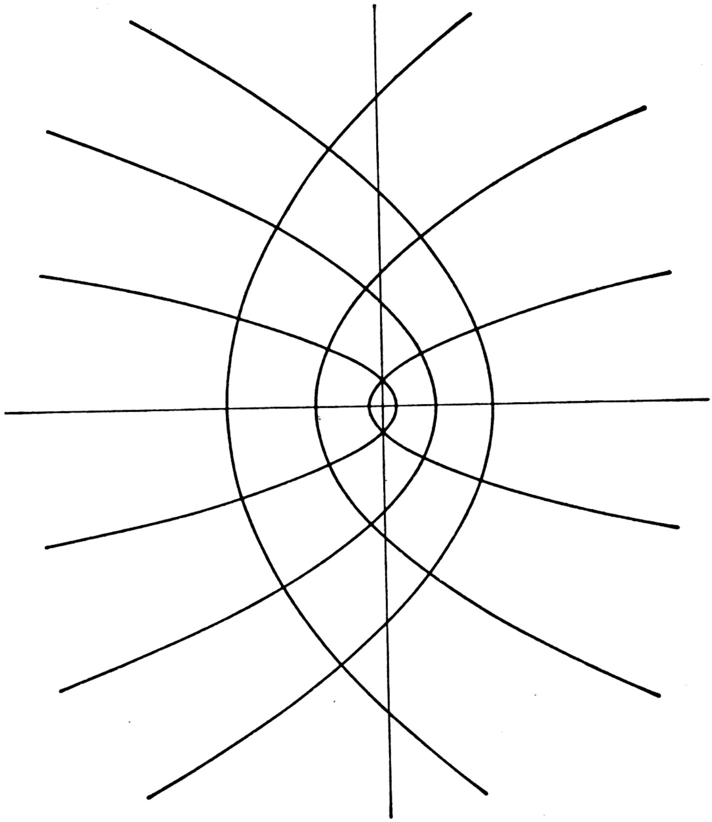


図3-6　w-平　面

$w=e^z$ による写像は非常に簡単である．直線 $x=x_0$ と $y=y_0$ は，原点中心の円と偏角一定の半直線に写る．z-平面の他の直線はすべて対数螺線に写る．$2\pi i$ の整数だけの差をもつような 2 点を含まない領域では，写像は 1 対 1 になる． とくに，水平な帯 $y_1<y<y_2, y_2-y_1\leqq 2\pi$ はある角領域の上に写り，$y_2-y_1=\pi$ なら像は半平面である．ゆえに，平行な帯は半平面の上に写すことができ，したがって任意の円領域の上へも写しうる．虚軸で切った帯の左半分は半円に対応する．

この写像を具体的に式で書き下しておくと， 役に立つだろう． 関数 $\zeta=\xi+i\eta=e^z$ は帯 $-\pi/2<y<\pi/2$ を半平面 $\xi>0$ に写す．一方，

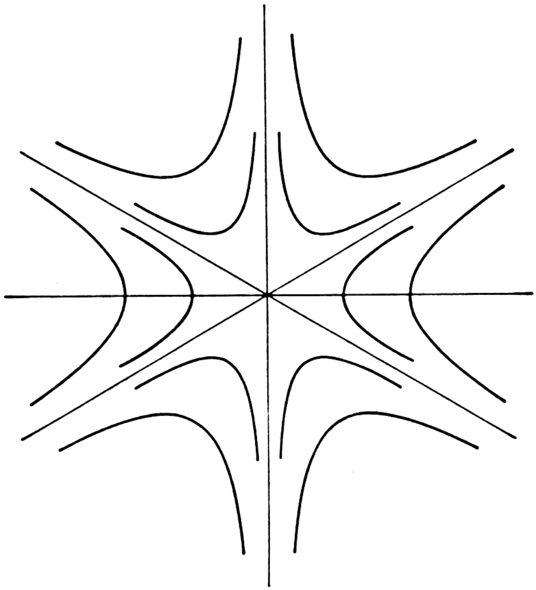


図3-7

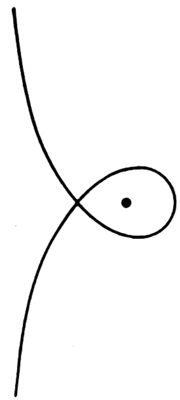


図3-8

$$w=\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$$

は $\xi>0$ を $|w|<1$ の上に写す．ゆえに，

$$w=\frac{e^z-1}{e^z+1}=\tanh\frac{z}{2}$$

が帯 $|\mathrm{Im}\, z|<\pi/2$ を単位円 $|w|<1$ の上に1対1に写す．

4.2. 基本的な写像　領域 Ω_1 を等角に領域 Ω_2 の上へ写す問題に直面したときには，2つの段階にわけることが得策である．まず，Ω_1 を円領域に写し，その円領域を Ω_2 に写すのである．いいかえると，等角写像の問題は，ある領域を円板または半平面の上へ写す問題に帰着される．第6章で，この写像の問題が，境界がただ一つの単純閉曲線からなる領域に対しては，いつも解をもつことを示す．

われわれの目的に対する主な道具は，1次変換と累乗，指数関数，対数に

よる変換である．これらの変換は，直線や円の族を簡単な曲線の族に写すという特徴的な性質をもっている．この理由により，これらの用途は境界が円弧や線分でできている領域に本質的に限られている．累乗は角をまっすぐにするのに役立ち，指数関数を使えば角 0 を直線の角にすることさえできる．

これらの手段により，例えば境界が共通の端点をもつ 2 つの円弧からなる領域の標準写像をみつけよう．この領域は円弧状のくさび（角は π より大きくてもよい）か，またはその補集合である．弧の端点を a,b とし，最初に 1 次変換 $z_1=(z-a)/(z-b)$ を行うと，はじめの領域は角領域に写る． 適当な累乗 $w=z_1{}^{\alpha}$ によりこの角領域は半平面の上に写る．

2 つの円が点 a で接しているときには，$z_1=1/(z-a)$ により 2 つの円の間にある領域は平行な帯の上に写り，指数関数による適当な変換でこの帯は半平面の上に写る．

もう少し一般に，同じ方法が 2 つの角が直角である円弧三角形に応用しよう． 直角でない頂点を a とし， a からでる 2 辺が再び交わる点を b とし， 1 次変換 $z_1=(z-a)/(z-b)$ を行うと， この三角形は扇形に写る． 適当に何乗かすると，この扇形は半円に写る；半円は円弧によるくさび型の領域だから前記のようにして半平面に写る．

これに関連して，しばしば起る特別な場合を扱う．線分の補集合を円の内部または外部へ写す写像を求める． この領域は角が 2π のくさびである；一般性を失うことなく線分の端点を ± 1 としてよい． 1 次変換

$$z_1=\frac{z+1}{z-1}$$

は，このくさびを負の実軸の補集合の上へ写す．次に，平方根は実部が正になるようにとり，

$$z_2=\sqrt{z_1}$$

とおくと，これは右半平面に写す．最後に，変換

$$w=\frac{z_2-1}{z_2+1}$$

は，この半平面を $|w|<1$ の上へ写す．

途中の変数を消去することにより，求める写像は

$$z=\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right), \quad w=z-\sqrt{z^2-1} \tag{16}$$

となる．平方根の符号は，$(z-\sqrt{z^2-1})(z+\sqrt{z^2-1})=1$ だから，条件 $|w|<1$ により一意的にきまってしまう．この符号をかえると，われわれの領域から $|w|>1$ の上への写像をうる．

写像(16)をもっとくわしく調べるために，$w=\rho e^{i\theta}$ とおくと

$$x=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\theta, \quad y=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta$$

をうる．θ を消去すると，

$$\frac{x^2}{\left[\frac{1}{2}(\rho+\rho^{-1})\right]^2}+\frac{y^2}{\left[\frac{1}{2}(\rho-\rho^{-1})\right]^2}=1 \tag{17}$$

となり，ρ を消去すると，

$$\frac{x^2}{\cos^2\theta}-\frac{y^2}{\sin^2\theta}=1 \tag{18}$$

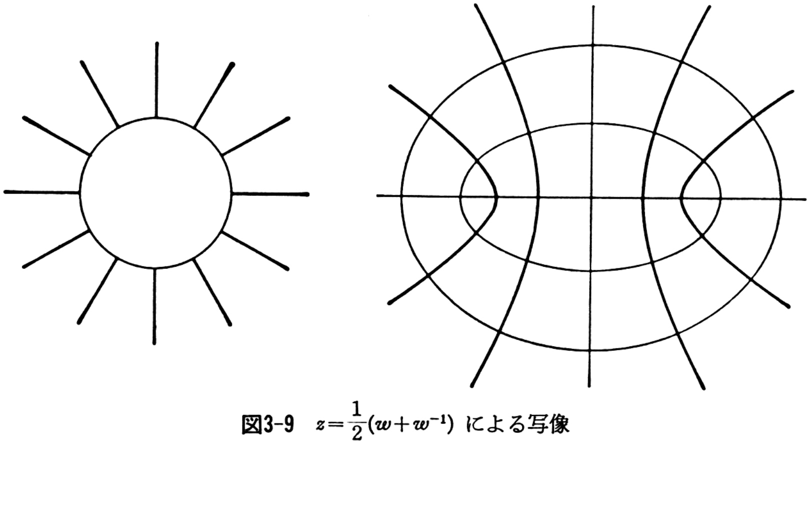


図3-9　$z=\frac{1}{2}(w+w^{-1})$ による写像

をうる．ゆえに，円 $|w|=\rho<1$ の像は長軸 $\rho+\rho^{-1}$，短軸 $\rho^{-1}-\rho$ の楕円である．半径の像は双曲線の1つの枝の半分である．楕円(17)と双曲線(18)は焦点を共有する．対応を図3-9に示す．

明らかに，変換(16)を楕円の外側または双曲線の2つの枝の間の領域を円状領域に写す写像として，われわれの基本等角写像の表に入れてよい．しかし，楕円の内側または双曲線の一つの枝の内側を写しているのではない．

最後のより自明でない例として，3次式 $w=a_0z^3+a_1z^2+a_2z+a_3$ による写像を調べよう．よく知られた変換 $z=z_1-a_1/3a_0$ により2次の項を除くことができ，適当な正規化をして $w=z^3-3z$ の形にすることができる．係数は ±1 で微分係数が0になるようにえらんだ．

変換(16)を用いて補助の変数 ζ を

$$z=\zeta+\frac{1}{\zeta}$$

と定義し導入すると，われわれの3次式は次の簡単な形になる：

$$w=\zeta^3+\frac{1}{\zeta^3}.$$

各 z に対し ζ の値は2つきまるがそれは逆数になって，対応する w の値は同じになることに注意する．ζ を一つにきめるためには $|\zeta|<1$ という条件をおけばよいが，そのときには線分 $(-2,2)$ が z-平面から除かれてしまう．

さて，z-平面と w-平面の対応を目で見るのは容易である．円 $|\zeta|=\rho<1$ に，z-平面の長短軸の長さが $2(\rho^{-1}\pm\rho)$ の楕円が対応し，w-平面では軸の長さが $2(\rho^{-3}\pm\rho^3)$ の楕円が対応する．半径 $\arg\zeta=\theta$ には z-平面，w-平面で双曲線の1つの枝が対応する；z-平面のは正の実軸と角 $-\theta$ をなす漸近線をもち，w-平面ではその角が -3θ になる．焦点を共有する楕円と双曲線の全体の模様は変わらないが，z が楕円を1周するときに w は対応する大きな楕円を3回まわる．こうして，事情は簡単な写像 $w=z^3$ の場合に非常に似ている．向きについては図3-9に読者は頼ればよい．

漸近線のなす角が $\leqq2\pi/3$ であるような双曲線の2つの枝の間の領域では，写像は1対1であり．とくに，双曲線 $3x^2-y^2=3$ と x 軸により z-平面は6

つの領域にわかれるが，その各々は半平面の上へ写る．３つが上半平面に，残りの３つが下半平面に対応する．双曲線の右側の枝の内側は，負の実軸にそって -2 まで切込みをいれた全平面の上へ写る．

問　題

すべての写像は等角とする．

1. 円 $|z|<1$ と円 $|z-1|<1$ の共通部分を単位円の内部へ写せ．２つの対称性を保つように写像を選べ．
2. $|z|=1$ と $\left|z-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$ の間の領域を半平面に写せ．
3. 円弧 $|z|=1, y\geqq 0$ の補集合を単位円の外へ写し，∞ には ∞ が対応するようにせよ．
4. 放物線 $y^2=2px$ の外側を円板 $|w|<1$ の上へ写し，$z=0, z=-p/2$ にはそれぞれ $w=1, w=0$ が対応するようにせよ．（リンデレーフ．）
5. 双曲線 $x^2-y^2=a^2$ の右側の枝の内側を円板 $|w|<1$ に写し，焦点は $w=0$ に頂点は $w=-1$ に対応するようにせよ．（リンデレーフ．）
6. レムニスケート $|z^2-a^2|=\rho^2$, $(\rho>a>0)$ の内側を対称性を保つようにして $|w|<1$ の上へ写せ．（リンデレーフ．）
7. 楕円 $(x/a)^2+(y/b)^2=1$ の外部を対称性を保って $|w|<1$ へ写せ．
8. z-平面上で双曲線 $x^2-y^2=1$ の右側の枝の左側にある部分を，半平面に写せ．（リンデレーフ．）（ヒント：一方で考えている領域の上半分において $w=z^2$ による写像を考え，他方で $w=z^3-3z$ による写像を考えよ）．

4.3. 初等リーマン面

関数の対応する写像による視覚化は，その写像が１対１のときだけ完全に明確である．そうでないときは，異なる点が同じ座標をもってもよいような一般化された領域を導入し，われわれの想像力に必要な加勢を与えることができる．これをするために，同じ位置を占める点を他の特徴で，例えば付せんをつけるとか色をぬるかして，区別することができると仮定する必要がある．同じ付せんをもつ点は，同じシートの上に，または同じ層の上にあると考える．

この考えが**リーマン面**の概念へ発展する．ここでは，その正確な定義を与えようとは思わない．われわれの目的には，お話しとしてリーマン面を導入するだけで十分である．説明のためにだけ用い，論理的な証明には決して用いないことにするかぎり，そうしてかまわない．

もっとも簡単なリーマン面は，$n>1$ を整数として $w=z^n$ による写像と関連する．n 個の角領域 $(k-1)(2\pi/n)<\arg z<k(2\pi/n), k=1, \cdots, n$ の各々と正の実軸を除いた全 w-平面とが 1 対 1 対応することを知っている．各角領域の像は正の実軸にそって切り込みをいれてえられる；この切り口は上側のふちと下側のふちをもつ．z-平面での n 個の角領域に対応して，この切り口をもった w-平面の n 個の同じ写しを作る．これを，リーマン面のシートとして付せん k をつけて区別し，この k は対応する角領域と同一視するのに役立つ．z が z-平面を動くとき，対応する w がリーマン面の上を動くのは自由でなければならない．このために，1 番目のシートの切り口の下のふちを 2 番目のシートの上ふちにつなぎ，第 2 のシートの下ふちを第 3 のシートの上ふちとつなぎ，これを順にやっていく．最後に，n 番目のシートの下ふちを 1 番目のシートの上ふちにつなぎ，一回りが完成する．物理的意味では，これは自分と交わることなしには不可能であるが，頭の中で考えるモデルとしてはこの矛盾はさけられるだろう．こうして出来たのがリーマン面で，その点は z-平面の点と 1 対 1 に対応する．さらに，この対応は連続である；連続の定義は作り方からわかるだろう．

正の実軸にそう切り口は 0 から∞にいたる任意の単純曲線にそう切り口におきかえることができよう；こうしてできたリーマン面も，もとのものと同じと考えるべきである．いいかえると，切り口を面上のどの線にするか特定する方法はないが，説明をするためには切り口をきめなければならない．

点 $w=0$ は特別である．それはすべてのシートとつながっているし，曲線は原点のまわりを n 回まわらないと閉じない．このような点を**分岐点**という．もし，このリーマン面を拡張された平面の上で考えるなら，∞も分岐点になる．一般には，分岐点はすべてのシートとつながっている必要はない；h 枚のシートとつながっているとき，位数が $h-1$ であるという．

$w=e^z$ に対応するリーマン面も同様の性質をもつ．このときは，平行な帯 $(k-1)2\pi<y<k\cdot 2\pi$ が正の実軸にそった切り口をもつシートの上に $w=e^z$ により写る．各シートは次々と順につなぎ，それは上下に限りのない螺線になる．e^z は 0 になることがないという事実に対応して，原点はリーマン面の点

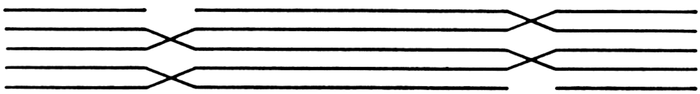


図3-10　cos z のリーマン面

とはしない.

読者は，他のリーマン面を作ることも容易であろう．ここでは，$w=\cos z$ のリーマン面を考えて，手順を示す例としよう．一つか場合によってはいくつかの切り口を除いた全平面の上に1対1に写されるような領域を**基本領域**とよぶ．$w=\cos z$ の基本領域としては，帯 $(k-1)\pi<x<k\pi$ をとることができる．各々の帯は，実軸上の $-\infty$ から -1 までと1から∞までにそった切り口をもつ全 w-平面の上に写される．直線 $x=k\pi$ は，k が偶数のとき正の切り口の両方のふちに対応し，k が奇数ならば負の切り口のふちに対応する．直線 $x=k\pi$ で隣り合った2つの帯を考えると，対応する切り口のふちをぶっ違いにつながねばならず，$w=\pm1$ (k が偶数なら＋，奇なら－) が1位の分岐点になることがわかる．こうしてえられた面は，$w=1$ と $w=-1$ の上に無限個の1位の分岐点をもち，それは交互に奇数番目と偶数番目のシートをつないでいる.

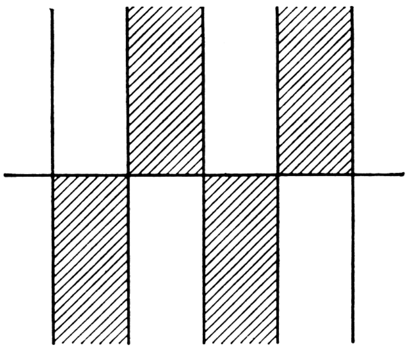


図3-11　cos z の基本領域

シートのつながり方を図解する一つの試みとして，図3-10がある．切り口を互いに平行にとり，それに横断的に分岐点を通ってリーマン面を切り，その切断線を図は表している．同じ高さの水平線上の任意の2点は，切り口のどれにも交わらずに曲線で結びうることを，読者は心に留めてほしい.

このような表現の利益は何であろうとともかく，リーマン面のはっきりした映像は z-平面での基本領域の直接の考察によってえられる．図3-11のように，上半平面と下半平面の部分領域にわけた方が説明し易い．影をつけた

領域は $\cos z$ の虚部が正になるところである．各領域は半平面に対応し，境界点 1 と -1 にしるしをつける．任意の隣り合った 2 つの領域に対し，一方は白で一方は影がついているが，半平面は 3 つの区間 $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$ のどれか 1 つをこえて結ばれる．正確な接合個処の選択は z-平面での対応する事情をちょっと見れば自動的である．

問　題

1. 次の関数のリーマン面をかけ：

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

2. $w=(z^2-1)^2$ に対し同じ.

3. $w=z^3-3z$ に対し同じ.

第4章　複素積分

1. 基礎的諸定理

解析関数の多くの重要な性質を複素積分を用いずに証明することは非常に困難である．例えば，解析関数の導関数が連続になる，あるいは高階の導関数をもつということを，複素積分かまたはそれと同等な道具に頼らないで証明できるようになったのは，最近のことである．現在ある積分によらない証明は，少なくとも古典的証明より極めて難解である†．

実数の場合のように，定積分と不定積分を区別する．不定積分は，ある領域で与えられた解析関数に等しい導関数をもつ関数である；初等的な多くの場合は，わかっている導関数の公式の逆として不定積分はみつけられる．定積分は微分可能または区分的に微分可能な曲線の上で行われ，解析関数に限らない．実数の定積分の定義のまねをして極限操作によりそれは定義される．実際には，実数の積分を用いて複素定積分の定義をする方がよい．こうすると，実数の場合と本質的に同じな積分の存在証明をくり返さずにすむだろう．当然，読者は実連続関数の定積分についてよく知っていなければならない．

1.1. 線積分　実積分のまず最初の一般化は，実区間の上での複素数値関数の定積分である．$f(t)=u(t)+iv(t)$ が区間 $[a,b]$ で定義された連続関数のとき，

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b u(t)dt+i\int_a^b v(t)dt \tag{1}$$

と定義する．この積分は，実積分の性質をほとんどそのまま持つ．とくに，$c=\alpha+i\beta$ を複素数の定数とすると，

† 積分を用いずに，導関数の連続性を R.L. Plunkett が証明した (Bull. Am. Math. Soc. 65, 1959). E. H. Connell と P. Porcelli が高階導関数の存在を証明した (Bull. Am. Math. Soc. 67, 1961). どちらの証明も，G. T. Whyburn による位相的な定理にもとづいている．

(2)
$$\int_a^b cf(t)dt = c\int_a^b f(t)dt$$

が成り立つ．何故なら，両辺は次式に等しいからである：

$$\int_a^b (\alpha u - \beta v)dt + i\int_a^b (\alpha v + \beta u)dt.$$

$a \leqq b$ のとき，任意の複素関数 $f(t)$ に対し，基本的な不等式

(3)
$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqq \int_a^b |f(t)|dt$$

が成立する．証明のために，θ を実数として $c=e^{-i\theta}$ とおき(2)を用いると，

$$\mathrm{Re}\left[e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt\right] = \int_a^b \mathrm{Re}[e^{-i\theta}f(t)]dt \leqq \int_a^b |f(t)|dt$$

が成立する．$\theta = \arg\int_a^b f(t)dt$ ととると，左辺は積分の絶対値となり，(3) が成立する†．

さて，$z=z(t), a\leqq t\leqq b$ で表された区分的に微分可能な曲線 γ を考える．関数 $f(z)$ が γ の上で定義され連続とすると，$f(z(t))$ は連続となり

(4)
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

とおくことができる．これを，曲線 γ の上での $f(z)$ の**複素線積分**の，われわれの定義とする．(4)の右辺で $z'(t)$ が全区間で連続ではないときは，積分区間をよく知られた方法で分割しなければならぬ．曲線 γ の上の線積分を考えるときは，黙っていても γ は区分的に微分可能と理解することにしよう．

積分 (4) のもっとも重要な性質は，曲線の**助変数変換**による不変性である．助変数変換 $t=t(\tau)$ は区間 $\alpha\leqq\tau\leqq\beta$ を $a\leqq t\leqq b$ の上へ写す単調増加関数で，区分的に微分可能と仮定する．積分の変数変換の公式から，

$$\int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(z(t(\tau)))z'(t(\tau))t'(\tau)d\tau$$

をうる．$z'(t(\tau))t'(\tau)$ は $z(t(\tau))$ の τ に関する微分であり，したがって積分(4)

†) $\int_a^b f(t)dt=0$ のとき θ は定義できないが，このときは(3)は明らかである．

は，γ が $z=z(t)$ で表されても $z=z(t(\tau))$ で表されても同じ値をもつ．

3章2.1節で，逆向きの曲線 $-\gamma$ を $z=z(-t)$, $-b\leqq t\leqq -a$ で定義した．ゆえに，

$$\int_{-\gamma} f(z)dz=\int_{-b}^{-a} f(z(-t))(-z'(-t))dt$$

となり，変数変換をすれば，右辺は

$$\int_{b}^{a} f(z(t))z'(t)dt$$

となる．これで，次の公式をうる：

(5)
$$\int_{-\gamma} f(z)dz=-\int_{\gamma} f(z)dz.$$

積分(4)はまた明らかな加法性をもっている．曲線 γ を有限個の部分曲線に分割するという意味は明らかだろう．分割を象徴的に式で

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n$$

とかくと，対応する積分は

(6)
$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n} f dz=\int_{\gamma_1} f dz+\int_{\gamma_2} f dz+\cdots+\int_{\gamma_n} f dz$$

をみたす．

最後に，閉曲線の上の線積分は助変数の移動でも不変である．もとの始点と新しい始点とで2つの部分曲線 γ_1, γ_2 がきまるが，$\gamma_1+\gamma_2$ の上の積分と $\gamma_2+\gamma_1$ の上の積分とは等しいから，不変性がいえる．

(4)の形の積分に加えて，$\bar{z}$ に関する線積分を考えることもできる．もっとも便利な定義は2回共役をとって

$$\int_{\gamma} f\overline{dz}=\overline{\int_{\gamma} \bar{f}\, dz}$$

である．これを用いて，x または y に関する線積分を次のように導入する：

$$\int_{\gamma} f dx=\frac{1}{2}\left(\int_{\gamma} f dz+\int_{\gamma} f\overline{dz}\right),$$

$$\int_{\gamma} f dy=\frac{1}{2i}\left(\int_{\gamma} f dz-\int_{\gamma} f\overline{dz}\right).$$

$f=u+iv$ とおき，積分 (4) を実部虚部にわけた形で

$$\int_\gamma (udx-vdy)+i\int_\gamma (udy+vdx) \tag{7}$$

と書くことができる．

もちろん，

$$\int_\gamma pdx+qdy$$

の形の積分を定義することから始めることもできた．その場合は (7) が積分 (4) の定義になるだろう．どちらをとるかは趣味の問題である．

本質的に別な線分として弧長に関する積分がある．2つの記号が同じものに使われ，定義は

$$\int_a^b fds=\int_\gamma f\,|dz|=\int_\gamma f(z(t))|z'(t)|dt \tag{8}$$

である．この積分も曲線の助変数のとり方によらない．(5) に比べて

$$\int_{-\gamma} f|dz|=\int_\gamma f|dz|$$

が成り立つ．一方，(6) はそのままの形で成立する．不等式

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right|\leqq\int_\gamma |f||dz| \tag{9}$$

が (3) からえられる．

$f=1$ とすると(8)は $\int_\gamma |dz|$ となるが，これが曲線 γ の**弧長**の定義である．例として，円周の長さを計算してみよう．円の助変数表示 $z=z(t)=a+\rho e^{it}$, $0\leqq t\leqq 2\pi$ から $z'(t)=i\rho e^{it}$ となり，

$$\int_0^{2\pi}|z'(t)|dt=\int_0^{2\pi}\rho dt=2\pi\rho$$

がえられ，これは期待されたものである．

1.2. 長さをもつ曲線　曲線の弧長は，$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ と区間 $[a, b]$ をいろいろに分割して，和

$$|z(t_1)-z(t_0)|+|z(t_2)-z(t_1)|+\cdots+|z(t_n)-z(t_{n-1})| \tag{10}$$

をすべて考え，これらの上限としても定義できる．もしこの上限が有限ならば，曲線は**長さをもつ**という．区分的に微分可能な曲線は長さをもち，弧長の2つの定義が一致することを示すのは易しい． $|x(t_k)-x(t_{k-1})|\leqq|z(t_k)-z(t_{k-1})|$, $|y(t_k)-y(t_{k-1})|\leqq|z(t_k)-z(t_{k-1})|$ と， $|z(t_k)-z(t_{k-1})|\leqq|x(t_k)-x(t_{k-1})|+|y(t_k)-y(t_{k-1})|$ が成り立つから，和(10)が有界になるのと次の2つの和

$$|x(t_1)-x(t_0)|+|x(t_2)-x(t_1)|+\cdots+|x(t_n)-x(t_{n-1})|,$$
$$|y(t_1)-y(t_0)|+|y(t_2)-y(t_1)|+\cdots+|y(t_n)-y(t_{n-1})|$$

がともに有界になるのとは同時である．後者の和が区間の分割のしかたによらず有界なときに， $x(t), y(t)$ は**有界変動**であるという．曲線 $z=z(t)$ が長さをもつ必要十分条件は $z(t)$ の実部，虚部が有界変動のときである．

γ が長さをもち $f(z)$ が γ の上で連続ならば (8) の型の積分を，極限

$$\int_\gamma f ds=\lim \sum_{k=1}^{n} f(z(t_k))|z(t_k)-z(t_{k-1})|$$

として定義できる．ここで，極限は実数の定積分の定義に表れるのと同様の意味である．

解析関数の初等的理論で，長さはもつが区分的微分可能でない曲線が必要になることはめったにない．しかし，その概念はすべての数学者が知っていなければならないことの一つであろう．

1.3. 曲線の関数としての線積分　$\int_\gamma pdx+qdy$ の形の線積分は曲線 γ の関数 (汎関数) とみてよく研究される．このときは， p と q は領域 Ω で与えられた連続関数で， γ の方が Ω の中を自由に変わると仮定する．積分の重要な一つの種類は，曲線上の積分値が曲線の両端点だけできまるという性質をもつものである．すなわち， γ_1 と γ_2 が同じ始点と同じ終点をもつならば $\int_{\gamma_1} pdx+qdy=\int_{\gamma_2} pdx+qdy$ が成り立つと要求する．積分が両端点のみできまるということは，任意の閉曲線上での積分が0になるということに等しい．実際， γ が閉曲線ならば γ と $-\gamma$ は同じ端点をもち，積分が端点だ

けできまるなら

$$\int_\gamma=\int_{-\gamma}=-\int_\gamma$$

となり，ゆえに $\int_\gamma=0$ である．逆に，γ_1 と γ_2 が同じ端点をもてば $\gamma_1-\gamma_2$ は閉曲線になり，閉曲線上の積分が0ならば $\int_{\gamma_1}=\int_{\gamma_2}$ となる．

次の定理は線積分が端点だけできまるための必要十分条件である．

定理 1. Ω で定義された線積分 $\int_\gamma pdx+qdy$ が γ の端点でのみきまる必要十分条件は，Ω で $\partial U/\partial x=p,\ \partial U/\partial y=q$ をみたすような関数 $U(x,y)$ が存在することである．

十分の証明はすぐである．条件がみたされていると，慣用の記号を用いて，

$$\int_\gamma pdx+qdy=\int_a^b\left(\frac{\partial U}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial U}{\partial y}y'(t)\right)dt=\int_a^b\frac{d}{dt}U(x(t),y(t))dt$$
$$=U(x(b),y(b))-U(x(a),y(a))$$

と書け，この差は始点と終点だけできまる．必要の証明のために，1点 $(x_0, y_0)\in\Omega$ をとり固定し，$(x,y)\in\Omega$ と座標軸に平行な線分よりなる折れ線 γ で結ぶ(図4-1)．そして，関数 $U(x,y)$ を

$$U(x,y)=\int_\gamma pdx+qdy$$

で定義する．積分は端点だけできまるからこの定義は問題がない．さらに，

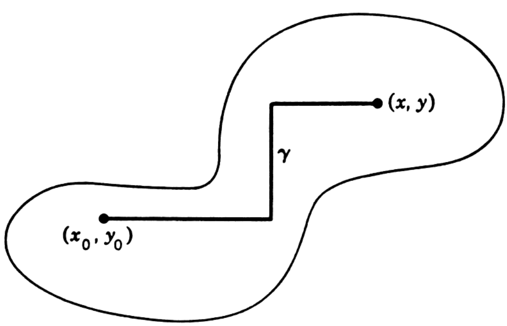


図4-1

もしγの最後の線分を水平にとることにすると，yを一定に保ち他の線分は動かさないでxを変化させることができる．最後の線分の上ではxを助変数にとることができ，

$$U(x,y)=\int^x p(x,y)dx+(\text{定数})$$

となる．ここで，積分の下端は書かなくてもよいだろう．この表示から直ちに $\partial U/\partial x=p$ がでてくる．同様にして，最後の線分を垂直にとることにより，$\partial U/\partial y=q$ が示される．

慣習として $dU=(\partial U/\partial x)dx+(\partial U/\partial y)dy$ とかき，この形で書くことのできる式 $pdx+qdy$ を**完全微分**という．こうして，積分が端点だけできまるのは被積分関数が完全微分になっているときである．ここで，p, q, U は実関数でも複素関数のどちらでもよい．もし存在すれば，関数 $U(x,y)$ は定数だけの差を無視すれば一意的である．なぜなら，2つの関数が同じ偏導関数をもてばその差は定数になるからである．

$f(z)dz=f(z)dx+if(z)dy$ が完全微分になるのはどんなときか．定義により Ω に関数 $F(z)$ があり

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x}=f(z),\quad \frac{\partial F(z)}{\partial y}=if(z)$$

とならねばならぬ．もしそうならば，$F(z)$ はコーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-i\frac{\partial F}{\partial y}$$

をみたす；$f(z)$ は仮定から連続だから（そうでないと $\int_\gamma fdz$ が定義できない），$F(z)$ は解析的で導関数が $f(z)$ になる（2章1.2節）．

連続関数fの積分 $\int_\gamma fdz$ がγの端点のみできまるための必要十分条件は，$f(z)$ が Ω での解析関数の導関数になることである．

この条件の下で$f(z)$自身が解析的になることをのちに証明する．

上の結果の応用として，nを整数で$\geqq 0$とすると，任意の閉曲線γに対し

$$\int_\gamma (z-a)^n dz=0 \tag{11}$$

がわかる．$(z-a)^n$ は全平面での解析関数 $(z-a)^{n+1}/(n+1)$ の導関数だからである．n が負の整数で $n\neq-1$ とすると，a を通らない任意の閉曲線に対し同じ結果が成り立つ．というのは，a を除いた残りの領域でやはり不定積分は解析的で1価である．$n=-1$ のときは，(11)は必ずしも成り立たない．a を中心とする円 C を考えると，$z=a+\rho e^{it}, 0\leqq t\leqq 2\pi$ と表され，

$$\int_C \frac{dz}{z-a}=\int_0^{2\pi} i\,dt=2\pi i$$

となる．この結果は，$\log(z-a)$ の1価な枝を円環 $\rho_1<|z-a|<\rho_2$ において定義することはできないということを示している．一方，閉曲線 γ が a を含まない半平面に入っているときは積分は0になる．何故なら，そのような半平面では $\log(z-a)$ の1価解析的な枝が定義できるからである．

問　題

1. 0と $1+i$ を結ぶ線分を γ とするとき，次の積分を計算せよ：

$$\int_\gamma x\,dz.$$

2. 円は正の向きとして，次の積分を2通りに計算せよ：

$$\int_{|z|=r} x\,dz.$$

最初は助数変表示を用いて，次は円周上で $x=\frac{1}{2}\left(z+\bar{z}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{r^2}{z}\right)$ が成り立つことを用いよ．

3. 円の向きは正の向きとして，次の積分を計算せよ：

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1}.$$

4. 次の積分を計算せよ：

$$\int_{|z|=1} |z-1|\cdot|dz|.$$

5. $f(z)$ は閉曲線 γ の上で解析的(すなわち，γ を含むある領域で f は解析的)とする．このとき，

$$\int_\gamma \overline{f(z)}f'(z)\,dz$$

は純虚数であることを示せ．($f'(z)$ の連続性は仮定しておく．)

6. 領域 Ω で $f(z)$ は解析的で $|f(z)-1|<1$ をみたすと仮定する．このとき，Ω 内の任意の閉曲線 γ に対し，

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=0$$

を示せ．（$f'(z)$ の連続性は仮定する．）

7. $P(z)$ を多項式とし，C は円 $|z-a|=R$ とする．このとき $\int_C P(z)\overline{dz}$ の値は何か．（答 $-2\pi iR^2P'(a)$.）

8. 次の式が意味をもち成り立つような領域 Ω はどんなものか：

$$\int_\gamma \log z dz=0.$$

1.4. 長方形に対するコーシーの定理　コーシーの定理にはいくつかの形があるが，その違いは解析的というよりはむしろ位相的な内容にある．位相的考察が自明な場合から始めるのが自然である．

不等式 $a\leqq x\leqq b, c\leqq y\leqq d$ で定義された長方形 R を考える．その周を4つの線分からなる単純閉曲線と考え，向きは進行方向の左側に R があるように選ぶ．ゆえに，頂点の順番は $(a,c),(b,c),(b,d),(a,d)$ の順である．この閉曲線を R の境界曲線または周といい，∂R とかく[†]．

R は閉集合であり領域ではないことを強調しておく．次の定理において，長方形 R で解析的な関数を考える．そのような関数は定義として，R を含むある開集合で定義され解析的になっていることを思い出しておこう．

次の定理はコーシーの定理の下準備である：

定理 2. $f(z)$ が R で解析的ならば次の式が成り立つ：

(12)
$$\int_{\partial R} f(z)dz=0.$$

証明は長方形を細分していく方法による．記号として

$$\eta(R)=\int_{\partial R} f(z)dz$$

とおき，この記号は R に含まれる他の長方形に対しても準用する．R を4つの合同な長方形 $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}, R^{(4)}$ に分割すると，

(13)
$$\eta(R)=\eta(R^{(1)})+\eta(R^{(2)})+\eta(R^{(3)})+\eta(R^{(4)})$$

[†] これは標準的な記号で，くり返し用いるだろう．前の約束により ∂R は点集合としての R の境界でもある（3章1.2節）．

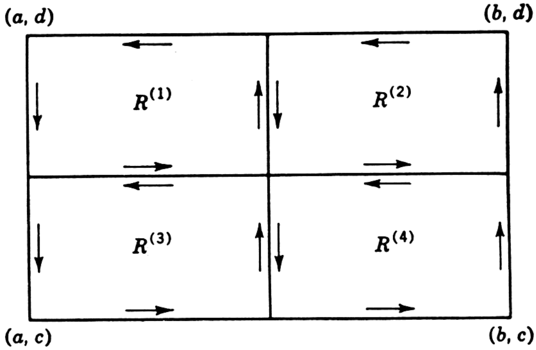


図4-2　長方形の細分

がなりたつ．共通辺の上の積分は互いに打ち消し合うからである．重要な注意であるが，これは明確に証明でき，幾何学的直観を内密に使用してはいない．それでも，図をかいておくことは有用であろう(図4-2)．

(13)から少くとも1つの長方形 $R^{(k)}$, $k=1,2,3,4$ は，条件

$$|\eta(R^{(k)})|\geqq\frac{1}{4}|\eta(R)|$$

をみたさねばならない．この長方形を R_1 とかくことにする；もしいくつかの $R^{(k)}$ がこの性質をもつなら，あるきまった規則でどれかを選ぶことにしておけばよい．

この方法は次次とくり返していくことができ，長方形の列 $R\supset R_1\supset R_2\supset\cdots\supset R_n\supset\cdots$ で，

$$|\eta(R_n)|\geqq\frac{1}{4}|\eta(R_{n-1})|$$

をみたし，したがって

$$|\eta(R_n)|\geqq 4^{-n}|\eta(R)| \tag{14}$$

をみたすものをうる．

長方形 R_n は1点 $z^*\in R$ に収束する；その意味は，近傍 $|z-z^*|<\delta$ を任意に与えたときに，n を十分大きくすれば R_n はみなその近傍に入ってしまう．まず δ を小さくして，$|z-z^*|<\delta$ で $f(z)$ が解析的であるようにしておく．

次に，$\varepsilon>0$ が与えられたとして，$0<|z-z^*|<\delta$ のときに

$$\left|\frac{f(z)-f(*)}{z-z^*}-f'(z^*)\right|<\varepsilon$$

となるように，または修正して

$$|f(z)-f(z^*)-(z-z^*)f'(z^*)|<\varepsilon|z-z^*| \tag{15}$$

となるように δ をとる．δ は上の2つの条件を同時にみたし，R_n は $|z-z^*|<\delta$ に含まれると仮定してよい．

さて，

$$\int_{\partial R_n} dz=0, \quad \int_{\partial R_n} z\,dz=0$$

に注意する．われわれの定理の特別な場合であるが，これらは1.1節ですでに証明した．証明は，1, z がそれぞれ $z, z^2/2$ の導関数であるという事実にもとづいていた．

この式のおかげで，

$$\eta(R_n)=\int_{\partial R_n}[f(z)-f(z^*)-(z-z^*)f'(z^*)]dz$$

と書くことができ，(15)により

$$|\eta(R_n)|\leqq\varepsilon\int_{\partial R_n}|z-z^*|\cdot|dz| \tag{16}$$

をうる．

最後の積分で，$|z-z^*|$ は R_n の対角線の長さ d_n より以下である．R_n の周の長さを L_n と書くと，積分はしたがって $\leqq d_nL_n$ となる．d, L をもとの長方形の対応するものとすると，明らかに $d_n=2^{-n}d$, $L_n=2^{-n}L$ である．ゆえに，(16)により

$$|\eta(R_n)|\leqq 4^{-n}dL\varepsilon$$

がえられ，(14)と比べて

$$|\eta(R)|\leqq dL\varepsilon$$

をうる．ここで ε は任意だから $\eta(R)=0$ でなければならず，定理は証明された．

このきれいな証明は，これ以上簡単にすることはほとんどできないだろうが，本質的にはグルサーによる．彼はそれまで仮定されてきた $f'(z)$ の連続性が実は不要であるということを発見した．同時に，この証明は2重積分にも積分記号下の微分にも頼っていないのでそれ以前の証明より簡単である．

定理2の仮定はかなり弱められる．重要な用途のある次の強い形の定理を証明しよう．

定理 3. 長方形 R から有限個の内点 ζ_j を除いてえられる集合を R' とし，$f(z)$ は R' で解析的とする．すべての j に対し

$$\lim_{z\to\zeta_j}(z-\zeta_j)f(z)=0$$

が成り立つならば，次の式が成り立つ：

$$\int_{\partial R} f(z)dz=0.$$

R を小長方形にわけ小長方形の各々は高々1つしか ζ_j を含まないようにできるから，除外点 ζ をただ一つ含む場合を考えれば十分である．図4-3に示すように R を9個の長方形にわけ，まん中の長方形 R_0 を除き他の長方形全部に定理2を用いる．(12)に対応する式を全部加えて，打ち消し合う所を消すと，

$$\int_{\partial R} f(z)dz=\int_{\partial R_0} f(z)dz \tag{17}$$

をうる．$\varepsilon>0$ を与えたときに，長方形 R_0 を小さくとり，∂R_0 の上で

$$|f(z)|\leqq\frac{\varepsilon}{|z-\zeta|}$$

となるようにできる．こうすると

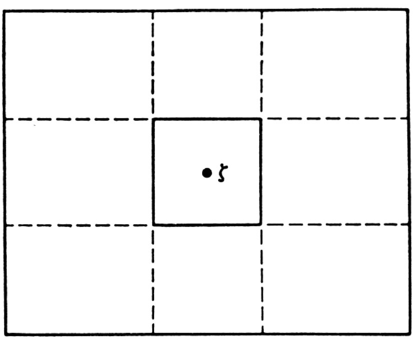


図4-3

(17)より

$$\left|\int_{\partial R} f dz\right| \leqq \varepsilon \int_{\partial R_0} \frac{|dz|}{|z-\zeta|}$$

が成り立つ．R_0 は ζ を中心とする1辺の長さ $2k$ の正方形であると仮定してよい．$z \in \partial R_0$ なら $|z-\zeta| \geqq k$ となり初等的評価で

$$\int_{\partial R_0} \frac{|dz|}{|z-\zeta|} < 8$$

がわかる．これで，

$$\left|\int_{\partial R} f dz\right| < 8\varepsilon$$

がえられ，ε は任意だから定理がいえた．

明らかに，$f(z)$ が R' で解析的で有界ならば，$f(z)$ は定理の仮定をみたす．

1.5. 円板に対するコーシーの定理　閉曲線上の解析関数の積分が必ず0になるというのはうそである．実際，a を中心とする円をCとすると，

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

となることを前にみた．積分が0ということが正しいためには，$f(z)$ がそこで解析的であり γ がその中に入っているような領域 Ω に関し，何か条件をつける必要がある．まだこの条件を定式化する場所ではなく，そのために，非常に特別な場合に考察を限らねばならぬ．以下この節では，Ω は開円板 $|z-z_0| < \rho$ であるとし，それを $\varDelta$ とかく．

定理 4. $f(z)$ が開円板 $\varDelta$ で解析的ならば，$\varDelta$ 内の任意の閉曲線 γ に対し

(18)
$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$

証明は定理1の後半の証明に用いた議論のくり返しである．関数 $F(z)$ を

(19)
$$F(z) = \int_\sigma f dz$$

と定義する．ただし，σ は中心 (x_0, y_0) から水平な線分で (x, y_0) に行き，そ

こから垂直な線分で (x,y) に行く道である．直ちに，$\partial F/\partial y=if(z)$ がわかる．一方，定理 2 により，σ はまず垂直な線分で行き次に水平な線分で行く道におきかえることができる．こうしても同じ関数 $F(z)$ がえられ，$\partial F/\partial x=f(z)$ がわかる．ゆえに，$F(z)$ は Δ で解析的で導関数が $f(z)$ であり，$f(z)dz$ は完全微分である．

明らかに同様の証明が，z が領域に入れば z_0 と z を対角線の両端にする長方形がその領域に含まれるという条件をみたす領域では正しい．長方形，半平面，楕円の内部などはこの条件をみたし，定理 4 はこのような領域でも成立する．しかし，この方法では一般な場合に到達することはできない．

応用のためには，定理 4 の結果が定理 3 の弱い仮定の下でも成立することが重要である．これを別に定理にしておこう．

定理 5． 開円板 Δ から有限個の点 ζ_j を除いた残りを Δ' とし，$f(z)$ は領域 Δ' で解析的とする．すべての j に対し，$\lim_{z\to\zeta_j}(z-\zeta_j)f(z)=0$ が成り立てば，Δ' 内の任意の閉曲線 γ に対し(18)が成立する．

σ が除外点を通ると困るから，証明を修正しなければならない．まず，直線 $x=x_0$ と $y=y_0$ の上には ζ_j が全くないとしよう．そのときは，3つの線分からなる σ をとり除外点をさけることができる (図4-4)．定理 3 を用いて(19) の $F(z)$ の値はまん中の線分のとり方によらないことがわかる；さらに，最後の線分は垂直か水平である．前のようにして $F(z)$ が $f(z)$ の不定積分であることがわかり定理をうる．

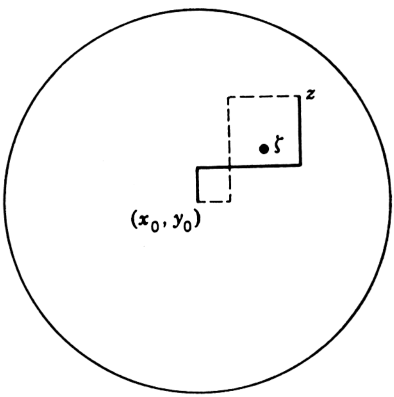


図4-4

直線 $x=x_0$ と $y=y_0$ の上に除外点があるときは，3つの代りに 4 つの線分を用いて同様の証明ができることは，読者には容易にわかるだろう．

2．コーシーの積分公式

コーシーの定理の簡単な応用として，z を助変数として含む線積分で解析関数$f(z)$を表示することが可能になる．コーシーの積分公式として有名なこの積分表示は多くの重要な応用をもつ．とりわけ，解析関数の局所的性質を詳細に調べることができる．

2.1．閉曲線に関する点の指数

コーシーの公式を導く準備として，閉曲線がその曲線上にない定点のまわりを何回まわっているかを，正確に述べる概念を定義しなければならぬ．曲線が区分的微分可能とすれば（そうしても一般性を大きく失うことはないだろう），次の補題が定義の基礎となる：

補題 1. 区分的に微分可能な閉曲線 γ が点 a を通らないとき，積分

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

の値は $2\pi i$ の整数倍である．

この補題は自明に思えるかもしれない．というのは，

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a}=\int_\gamma d\log(z-a)=\int_\gamma d\log|z-a|+i\int_\gamma d\arg(z-a)$$

となり，z が閉曲線をえがくと，$\log|z-a|$ は始めの値にもどり $\arg(z-a)$ は 2π の整数倍だけ増えるか減るかするからである．これで補題がえられたようにみえるだろうが，もっと注意深く考えてみれば，$\arg(z-a)$ が一意的な方法で定義されなければこの証明は価値がない．

もっとも簡単な証明は計算によるものである．γ の式を $z=z(t)$, $\alpha\leqq t\leqq\beta$ とし，次の関数を考える：

$$h(t)=\int_\alpha^t \frac{z'(t)}{z(t)-a}\,dt.$$

これは閉区間 $[\alpha,\beta]$ で定義され連続であり，$z'(t)$ が連続な所では導関数

$$h'(t)=\frac{z'(t)}{z(t)-a}$$

をもつ．この式から，$e^{-h(t)}(z(t)-a)$ の導関数は高々有限個の点を除いて恒等的に0になり，この関数は連続だから定数になってしまう．ゆえに，

$$e^{h(t)}=\frac{z(t)-a}{z(\alpha)-a}$$

となる．$z(\beta)=z(\alpha)$ より $e^{h(\beta)}=1$ となり，したがって $h(\beta)$ は $2\pi i$ の整数倍でなければならぬ．これで，補題は証明できた．

さて，**閉曲線 γ に関する点 a の指数**を

$$n(\gamma, a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{z-a}$$

で定義する．指数はまた暗示的な言葉で，a に関する γ の**回転数**ともよばれる．

$n(-\gamma, a)=-n(\gamma, a)$ は明らかである．

次の性質は定理4から直ちにわかる：

(i) γ が円の内部にあるとき，同じ円の外部の任意の点 a に対し，$n(\gamma, a)=0$ が成立する．

γ は点集合として有界閉集合である．その補集合は開集合で互いに交わらない領域，つまり補集合の成分の和として表される．このとき簡単に，γ がこれらの**領域をきめる**ということにしよう．もし，補集合を拡張された平面で考えるなら，無限遠点を含む成分がちょうど1つある．結局，γ は非有界な領域を1つだけきめることになる．

(ii) 指数 $n(\gamma, a)$ は a の関数として γ がきめる各領域において定数である．とくに非有界な領域では0になる．

γ できまる同じ領域内の任意の2点は，γ と交わらない折れ線で結ぶことができる．ゆえに，γ が a と b を結ぶ線分と交わらないときには $n(\gamma, a)=n(\gamma, b)$ となることを示せば，十分である．この線分の外では $(z-a)/(z-b)$ は実数で $\leqq 0$ となることは決してない．ゆえに，$\log[(z-a)/(z-b)]$ の主値はこの線分の補集合で解析的で，その導関数は $(z-a)^{-1}-(z-b)^{-1}$ である．もし γ がこの線分と交わらなければ

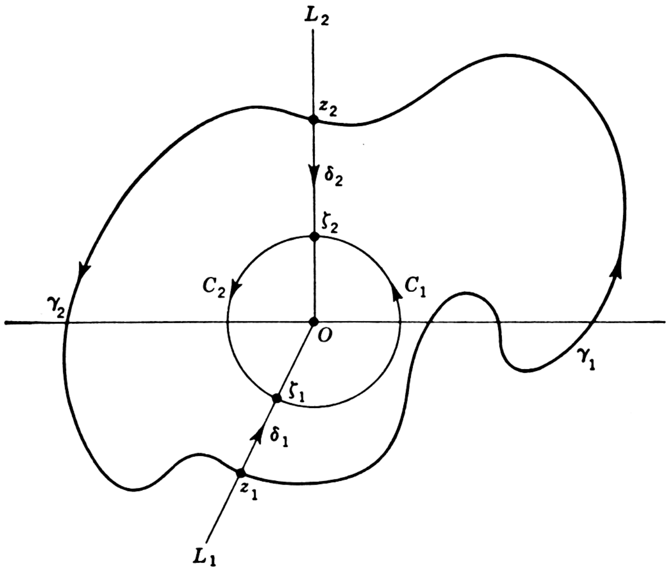


図4-5

$$\int_\gamma \left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)dz=0$$

でなければならず，$n(\gamma, a)=n(\gamma, b)$ をうる．$|a|$ が十分大きければ，γ は円 $|z|<\rho<|a|$ に含まれ，(i)により $n(\gamma, a)=0$ となる．これで非有界領域で $n(\gamma, a)=0$ が証明できた．

$n(\gamma, a)=1$ のときは特に重要であり，こうなるための幾何学的な条件を定式化することは望ましい．簡単のために $a=0$ とする．

補題 2. 原点を通らない閉曲線 γ 上の2点を z_1, z_2 とする．向きは γ の向きとして，z_1 から z_2 までの部分曲線を γ_1, z_2 から z_1 までを γ_2 とかく．z_1 は下半平面にあり z_2 は上半平面にあると仮定する．もし γ_1 が負の実軸と交わらず，γ_2 が正の実軸と交わらないなら，$n(\gamma, 0)=1$ である．

証明のために，原点から z_1, z_2 を通る半直線 L_1, L_2 をひく(図4-5)．ζ_1,, ζ_2 は原点を中心とする円 C と L_1, L_2 の交点とする．C は正の向きにとると，ζ_1 から ζ_2 までの円弧 C_1 は負の実軸と交わらず，ζ_2 から ζ_1 までの円弧は正

の実軸と交わらない．z_1 から ζ_1 まで，z_2 から ζ_2 までの線分を δ_1, δ_2 とかく．閉曲線 $\sigma_1=\gamma_1+\delta_2-C_1-\delta_1$, $\sigma_2=\gamma_2+\delta_1-C_2-\delta_2$ を考え，打ち消し合うことを考慮すると $n(\gamma,0)=n(C,0)+n(\sigma_1,0)+n(\sigma_2,0)$ をうる．しかし，σ_1 は負の実軸と交わらない． ゆえに， 原点は σ_1 がきめる非有界領域に入り $n(\sigma_1,0)=0$ である．同様にして $n(\sigma_2,0)=0$ となり，$n(\gamma,0)=n(C,0)=1$ である．

*問　題

この節の問題は通常の練習問題ではない．回転数の位相的な用途をみる例として役立つだろう．

1. γ を有限個の部分曲線に分割し，各々の上では $\arg(z-a)$ の1価な枝が存在するようにして，補題1の別証を与えよ．このような分割の存在を証明するためには，コンパクト性を用いることに特に注意せよ．

2. 区分的微分可能でなくても，a を通らない連続な任意の閉曲線 γ に対し $n(\gamma,a)$ は定義できる．このために γ を部分曲線 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ に分割し，各々は点 a を含まぬ円板の中に入っているようにする．γ_k の始点と終点を結ぶ線分を σ_k とし，$\sigma=\sigma_1+\cdots+\sigma_n$ とおく．$n(\gamma,a)=n(\sigma,a)$ と定義する．この定義を正当化するために次のことを証明せよ：

(a)　結果は γ の分割の仕方によらない；

(b)　γ が区分的に微分可能のときは，新しい定義は古いのと一致する；

(c)　本文の中の性質(i)，(ii)は，この場合も正しい．

3. 平面内の任意のジョルダン閉曲線はちょうど2つの領域をきめるというのが，**ジョルダンの曲線定理**である．回転数を用いれば，定理の一部，すなわちジョルダン閉曲線は少くとも2つの領域をきめるということは，速かに証明できる．これは，$n(\gamma,a)\neq 0$ となる a が存在することをいえばよい．

γ 上で $\operatorname{Re} z>0$ と仮定してよく， $z_1, z_2\in\gamma$, $\operatorname{Im} z_1<0$, $\operatorname{Im} z_2>0$ という2点があるとしてよい． さらにこの2点は， 0と z_1 を結ぶ線分と0と z_2 を結ぶ線分の上には γ の点がないと仮定してよい． γ_1, γ_2 は z_1 と z_2 の間の γ の部分とする(端点は除いておく)．

σ_1 は0から z_1 まで線分でいき次に γ_1 でいって z_2 から0に線分でもどる閉曲線とし， σ_2 は同様のもので γ_1 を γ_2 におきかえたものとする． すると，$\sigma_1-\sigma_2=\gamma$ または $-\gamma$, となる．

正の実軸は γ_1 にも γ_2 にも交わる(どうしてか？)．γ_2 との交点で一番右側にあるのを x_2 とする(図4-6)．

次のことを証明せよ：

(a)　$n(\sigma_1,x_2)=0$, ゆえに $z\in\gamma_2$ に対し $n(\sigma_1,z)=0$;

(b)　小さな $x>0$ に対し，$n(\sigma_1,x)=n(\sigma_2,x)=1$ (補題2)；

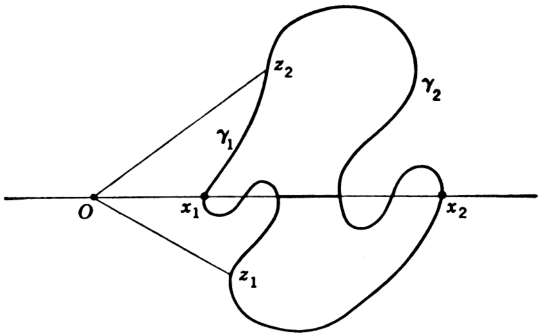


図4-6　ジョルダンの曲線定理の一部分

（c）　正の実軸と γ との最初の交点 x_1 は γ_1 の上にある；

（d）　$n(\sigma_2, x_1)=1$，ゆえに任意の $z\in\gamma_1$ に対し $n(\sigma_2, z)=1$；

（e）　正の実軸上の線分で，端点の一方は γ_1 に他方は γ_2 に属しその他の点は γ に入らないようなものがある．この線分の端点でない点 x に対し $n(\gamma, x)=1$ または -1.

2.2. 積分公式　$f(z)$ は開円板 Δ で解析的とする．Δ 内の閉曲線 γ と，γ の上にない点 $a\in\Delta$ をとる．コーシーの定理を関数

$$F(z)=\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

に適用しよう．この関数は $z\neq a$ なら解析的である．$z=a$ では定義されていないが，

$$\lim_{z\to a} F(z)(z-a)=\lim_{z\to a}(f(z)-f(a))=0$$

となり，定理5の条件をみたす．ゆえに，

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz=0$$

がいえる．この式を書きかえると

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz=f(a)\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

となり，右辺の積分は定義により $2\pi i\cdot n(\gamma, a)$ である．これで次の定理がえ

られた：

定理 6. $f(z)$ は開円板 Δ で解析的で，γ は Δ 内の閉曲線とする．このとき，γ の上にない任意の点 a に対し

$$n(\gamma, a)\cdot f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-a}dz \tag{20}$$

が成り立つ．ここで，$n(\gamma, a)$ は γ に関する a の指数である．

この命題で a が Δ の点であるという仮定を落した．(20)の両辺をよくみると a が Δ に入っていない場合も正しい．実際，$n(\gamma, a)$ も右辺の積分もこの場合にはともに 0 となる．

定理 5 が適用できるような領域に対しては定理 6 が正しいことは明らかである．除外点 ζ_j の存在も，それらが a と一致しなければ許される．

$n(\gamma, a)=1$ のときが一番よく用いられる．そのときは

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-a}dz \tag{21}$$

となり，これを表現公式と解釈する．実際 γ の上での $f(z)$ の値が与えられれば，直ちに $f(a)$ が計算できる．ただし，$f(z)$ は Δ で解析的としてのことである．(21)において，γ に関する a の指数が 1 であるかぎり a を動かしてもよい．こうして a を変数として扱うと，記号をかえて(21)を次の形に書きかえた方が便利である：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{22}$$

コーシーの積分公式と普通よばれる公式はこれである．$n(\gamma, z)=1$ のときだけこれは正しく，証明がすんだのは $f(z)$ が開円板 Δ で解析的なときだけであることを記憶しておかねばならぬ．

問　題

1. 次の積分を計算せよ：

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz.$$

2. 被積分関数を部分分数に分解して次の積分を計算せよ：

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+1}.$$

3. $|a|\neq\rho$ として，次の積分を計算せよ：

$$\int_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2}.$$

（ヒント：$z\bar{z}=\rho^2$ と $|dz|=(-i\rho/z)dz$ を用いる．）

2.3. 高階導関数　表現公式 (22) は解析関数の局所的研究にとって申し分のない道具を与える．とくに，解析関数は何回でも微分ができ，高階導関数はまた解析的であることを示しうる．

任意の領域 Ω で解析的な関数 $f(z)$ を考える．点 $a\in\Omega$ に δ-近傍 Δ を Ω に含まれるようにとり，Δ の中に a を中心とする円 C をとる．定理6を Δ で $f(z)$ に適用することができる．$n(C,a)=1$ だから C の内部の任意の点 z に対し $n(C,z)=1$ である．そのような z に対し(22)により次の式をうる：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

この積分が積分記号下で微分してよいと仮定すると，

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta \tag{23}$$

となり，さらに

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \tag{24}$$

をうる．もしこの微分が正当化されれば，C の内側であらゆる階数の導関数が存在することがいえたことになる．Ω の各点はこのようなある円の内側にできるから，全領域 Ω で存在が証明されるだろう．同時に，導関数に対する便利な表現公式がえられたことにもなる．

正当化のためには，実数の場合の対応する定理を引用することもできるし，助変数を含みそれに関し解析的な被積分関数の線積分に対し一般な定理を証明することもできる．ここでは次の補題を証明するだけにするが，今必要な

ことはこれで全部である：

補題 3. $\varphi(\zeta)$ は曲線 γ の上で連続とする．そのとき，関数

$$F_n(z)=\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n}d\zeta$$

は γ できまる各領域において解析的であり，その導関数は $F_n'(z)=nF_{n+1}(z)$ である．

まず，$F_1(z)$ が連続になることを証明する．z_0 を γ の上にない点とし，近傍 $|z-z_0|<\delta$ を γ と交わらないようにとる．z を小さい近傍 $|z-z_0|<\delta/2$ の中からとると，すべての $\zeta\in\gamma$ に対し $|\zeta-z|>\delta/2$ である．

$$F_1(z)-F_1(z_0)=(z-z_0)\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}$$

から，直ちに

$$|F_1(z)-F_1(z_0)|<|z-z_0|\cdot\frac{2}{\delta^2}\int_\gamma|\varphi|\cdot|d\zeta|$$

がえられ，この不等式は z_0 で $F_1(z)$ が連続なことを示す．

補題のこの証明の終った部分を，関数 $\varphi(\zeta)/(\zeta-z_0)$ に適用して，差の商

$$\frac{F_1(z)-F_1(z_0)}{z-z_0}=\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}d\zeta$$

は連続で，$z\to z_0$ とすると極限 $F_2(z_0)$ へ収束する．ゆえに，$F_1'(z)=F_2(z)$ がいえた．

一般の場合は帰納法による．$F_{n-1}'(z)=(n-1)F_n(z)$ は証明できたと仮定しよう．

$$F_n(z)-F_n(z_0)$$
$$=\left[\int_\gamma \frac{\varphi d\zeta}{(\zeta-z)^{n-1}(\zeta-z_0)}-\int_\gamma \frac{\varphi d\zeta}{(\zeta-z_0)^n}\right]+(z-z_0)\int_\gamma \frac{\varphi d\zeta}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)}$$

となり，これから $F_n(z)$ の連続性がいえる．実際，帰納法の仮定を関数 $\varphi(\zeta)/(\zeta-z_0)$ に用いて，$z\to z_0$ のとき最初の項は 0 へ収束するし，第 2 項は z_0 の近傍で積分が有界でやはり $z\to z_0$ で 0 に行く．さて，上の式の両辺を

$z-z_0$ で割り z を z_0 へ近づけると，第1項は帰納法の仮定から $(n-1)F_{n+1}(z_0)$ へ収束する．第2項は，$\varphi(\zeta)/(\zeta-z_0)$ を φ とした F_n に今証明したばかりの連続性を用いると，連続になり $z\to z_0$ で極限 $F_{n+1}(z_0)$ をもつ．ゆえに $F_n'(z_0)$ は存在し $nF_{n+1}(z_0)$ に等しい．

補題3が(23)と(24)を厳密に導くために必要なものであることは明らかである．これで，解析関数はあらゆる階数の導関数をもち，それは解析的で公式(24)により表示されることが証明された．

この定理から導かれるものの中から，2つの古典的な定理を出しておく．一つは**モレラの定理**とよばれ，次のようなものである：

$f(z)$ は領域 Ω で定義され連続とし，Ω 内の任意の閉曲線 γ に対し $\int_\gamma f dz=0$ とすれば，$f(z)$ は Ω で解析的である．

この仮定から，1.3節で注意したように，$f(z)$ はある解析関数 $F(z)$ の導関数であることがいえる．ゆえに，$f(z)$ 自身が解析的になる．

2番目の結果は**リュービルの定理**とよばれる：

全平面で解析的で有界な関数は定数になってしまう．

証明には(24)から導かれる簡単な評価式を用いる．C の半径を r とし C の上で $|f(\zeta)|\leqq M$ としよう．$z=a$ として，(24)から直ちに

$$|f^{(n)}(a)|\leqq Mn!r^{-n} \tag{25}$$

をうる．リュービルの定理の証明には $n=1$ のときしか必要でない．仮定は，あらゆる円の上で $|f(\zeta)|\leqq M$ となるという意味である．ゆえに，r を ∞ にもっていくことができ，(25)からすべての a に対し $f'(a)=0$ がわかり，関数は定数になる．

リュービルの定理を用いて，**代数学の基本定理**の簡単な証明がえられる．$P(z)$ を次数 >0 の多項式とする．もし $P(z)$ が0になることがないとすると $1/P(z)$ は全平面で解析的になる．$z\to\infty$ のとき $P(z)\to\infty$ になることはわかっているので，$1/P(z)$ は0に行く．これから有界がいえる (絶対値がリーマン球面で連続になるから有限の最大値をもつ)．リュービルの定理により $1/P(z)$ は定数になってしまう．これは矛盾だから，方程式 $P(z)=0$ は根をも

たねばならぬ.

不等式(25)は**コーシーの評価式**とよばれる．これは解析関数の高階微分係数が任意ではありえないことを示している; すなわち，(25)をみたす M と r がつねに存在しなければならない．この不等式を上手に使うためには，$|\zeta-a|=r$ 上での $|f|$ の最大値を $M(r)$ として，関数 $M(r)r^{-n}$ を小さくするように r をうまくとることが重要である.

問　題

1. 次の積分を計算せよ：

(i) $\displaystyle\int_{|z|=1} e^z z^{-n}dz$,　(ii) $\displaystyle\int_{|z|=2} z^n(1-z)^m dz$,　(iii) $\displaystyle\int_{|z|=\rho}|z-a|^{-4}|dz|$　$(|a|\neq\rho)$.

2. 全平面で解析的で，ある n が存在し十分大きなすべての z に対し $|f(z)|<|z|^n$ をみたす関数 $f(z)$ は，多項式になることを証明せよ.

3. $f(z)$ は $|z|\leqq R$ で解析的で $|f(z)|\leqq M$ とする．$|z|\leqq\rho<R$ において，$|f^{(n)}(z)|$ の上界をみつけよ.

4. $f(z)$ は $|z|<1$ で解析的で $|f(z)|\leqq 1/(1-|z|)$ をみたすとする．コーシーの評価式からえられる $|f^{(n)}(0)|$ の最良の評価を求めよ.

5. 解析関数の1点での高階微分係数が $|f^{(n)}(z)|>n!n^n$ $(n=1,2,\cdots)$ をみたすことはありえない．これを証明せよ．この種の定理でもっと良いものを定式化せよ.

***6.** 補題3のもっと一般な形がある：

z は領域 Ω にあり $\alpha\leqq t\leqq\beta$ として，関数 $\varphi(z,t)$ は両変数について連続とする．さらに，t を任意に固定したとき $\varphi(z,t)$ は z の関数として Ω で解析的と仮定する．そのとき，

$$F(z)=\int_\alpha^\beta \varphi(z,t)dt$$

は z に関し解析的で，次の式が成り立つ：

$$F'(z)=\int_\alpha^\beta \frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial z}dt. \tag{26}$$

これを証明するために，$\varphi(z,t)$ をコーシー積分で次のように表す：

$$\varphi(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta,t)}{\zeta-z}d\zeta.$$

このとき，

$$F(z)=\int_C\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \varphi(\zeta,t)dt\right)\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

が成り立つことを示せ．そして，補題3を用いて(26)を証明せよ.

3．解析関数の局所的性質

解析関数は何回でも微分できることを説明した．この節では，局所的性質をより綿密に調べたい．解析関数の孤立特異点の分類も含まれる．

3.1．除去可能特異点，テイラーの定理

定理3で，有限個の点で解析性に代えて最後の結果に影響しないような弱い条件を導入した．さらに定理5で，円板におけるコーシーの定理もこの弱い条件の下で成り立つことを示した．これはコーシーの積分公式を導くわれわれの方法の本質的な点であった．というのは，$(f(z)-f(a))/(z-a)$ という形の関数にコーシーの定理を適用しなければならなかったからである．

最後に，定理3の重要な条件をみたし a とは一致しないような有限個の除外点があっても，コーシーの積分公式が成立することを指摘した．この注意はそのみかけから思われるよりはもっと重要である．実際，コーシーの積分公式は $f(z)$ の積分による表現を与えるが，その積分を z の関数とみると，z に対応する値の定まり方は除外点でもそうでない点でも同様である．これから，この種の除外点は，情報の不足によってそうなっているだけで本来の性質ではないことがわかる．このような性格の点を**除去可能特異点**という．次の明確な定理を証明しよう．

定理 7． 領域 Ω から1点 a を除いた領域を Ω' とし，$f(z)$ は Ω' で解析的と仮定する．Ω での解析関数で Ω' では $f(z)$ に等しいようなものが存在するための必要十分条件は $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0$ である．このとき，拡張された関数は一意的に定まる．

拡張された関数があればそれは a で連続だから，必要性と一意性は明らかである．十分を証明するために，中心 a の円 C を，C とその内部が Ω に含まれるようにとる．コーシーの公式は成り立つから，C の内部の任意の点 $z\neq a$ で，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

とかける． しかし， 右辺の積分は C の内部全体で解析関数を表す．ゆえに，$z\neq a$ に対しては $f(z)$ に等しく，$z=a$ での値は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta \tag{27}$$

とした関数は，Ω で解析的になる．拡張された関数も $f(z)$ とかき (27) の値を $f(a)$ と書くのは自然である．

この結果を，コーシーの公式の証明に用いられた関数

$$F(z)=\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

に応用する．これは $z=a$ では定義されていないが $\lim_{z\to a}(z-a)F(z)=0$ はみたしている．z が a に近づいたときの $F(z)$ の極限は $f'(a)$ である．ゆえに，$z\neq a$ のときは $F(z)$ に等しく $z=a$ では $f'(a)$ に等しい解析関数が存在する．それを $f_1(z)$ とおく．同じことを $f_1(z)$ に対しくり返し，$z\neq a$ では $(f_1(z)-f_1(a))/(z-a)$ に等しく $z=a$ では $f_1'(a)$ に等しい解析関数 $f_2(z)$ が定義できる．これを続けることができる．

$f_n(z)$ を定義する帰納的な組立ては次の式でかける：

$$\begin{aligned}
f(z)&=f(a)+(z-a)f_1(z),\\
f_1(z)&=f_1(a)+(z-a)f_2(z),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_{n-1}(z)&=f_{n-1}(a)+(z-a)f_n(z).
\end{aligned}$$

これは $z=a$ でも正しく，これらの式から次の式をうる：

$$f(z)=f(a)+(z-a)f_1(a)+(z-a)^2f_2(a)+\cdots+(z-a)^{n-1}f_{n-1}(a)+(z-a)^nf_n(z).$$

両辺を n 回微分して $z=a$ を代入し，

$$f^{(n)}(a)=n!f_n(a)$$

をうる．これで係数 $f_n(a)$ は定まり，**テイラーの定理**の次の形をうる：

定理 8. $f(z)$ は領域 Ω で解析的で $a\in\Omega$ とすると，Ω での解析関数 $f_n(z)$ が存在し Ω で次の式が成立する：

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}+f_n(z)(z-a)^n. \tag{28}$$

この有限項までの展開は，のちに学ぶ無限のテイラー級数とは十分区別しなければならぬ．しかし，$f(z)$ の局所的性質の研究にもっとも有用なのは有限展開(28)である．$f_n(z)$ が線積分による簡単で具体的な表示をもつことから，その有用性はさらに高まる．

同じ円 C を用いて，まず

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

とかける．$f_n(\zeta)$ に(28)からえられる式を代入する．$f(\zeta)$ を含む主要な項は1つである．残りの項は，定数の係数を無視すると

$$F_\nu(a)=\int_C\frac{d\zeta}{(\zeta-a)^\nu(\zeta-z)},\quad \nu\geqq 1$$

という形である．ところが，C の内部にある任意の a に対し恒等的に*

$$F_1(a)=\frac{1}{(z-a)}\int_C\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-a}\right)d\zeta=0$$

となる．補題3により $F_{\nu+1}(a)=F_1^{(\nu)}(a)/\nu!$ となり，ゆえに $\nu\geqq 1$ のとき $F_\nu(a)=0$ である．ゆえに，$f_n(z)$ に対する表示式は

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^n(\zeta-z)}d\zeta \tag{29}$$

となる．z が C の内部にあればこの式は成立する．

*) a は C の中心であった．補題3を用いるために，円 C とその内部の点 z を固定し，a を動かし a の関数とみている．$a=z$ のとき $F_1(a)=0$ は1.3節で示した．（訳注）

3.2. 零点と極　$f(a)$ とすべての微分係数 $f^{(\nu)}(a)$ が 0 とすると，(28) によりすべての n に対し

$$f(z)=f_n(z)(z-a)^n \tag{30}$$

が成立する．一方，$f_n(z)$ に対する 1 つの評価が(29)からえられる．$f(z)$ は領域 Ω で解析的で，円 C とその内部は Ω に含まれるとしている．C 上で絶対値 $|f(z)|$ は最大値 M をもつ；C の半径を R とすると，$|z-a|<R$ のとき (29)から

$$|f_n(z)|\leqq\frac{M}{R^{n-1}(R-|z-a|)}$$

がいえる．(30)より

$$|f(z)|\leqq\left(\frac{|z-a|}{R}\right)^n\cdot\frac{MR}{R-|z-a|}$$

をうる．ここで，$|z-a|<R$ より $n\to\infty$ のとき $(|z-a|/R)^n\to 0$ である．ゆえに，C の内部で $f(z)=0$ が成立する．

さて，このとき $f(z)$ が Ω 全体で恒等的に 0 になることを示す．関数値 $f(z)$ とそこでのすべての高階微分係数が 0 となるような点の集合を E_1 とし，そうでない点の集合を E_2 とする．上で示したことから E_1 は開集合となり，関数とすべての高階導関数は連続だから E_2 も開集合となる．ゆえに，E_1 か E_2 は空集合でなければならぬ．E_2 が空集合なら $f(z)$ は恒等的に 0 になる．E_1 が空集合なら，$f(z)$ がある点で関数値と高階微分係数がみんな 0 になるということはありえない．

$f(z)$ が恒等的に 0 という関数ではないと仮定する．するともし $f(a)=0$ ならば，0 でない最初の微分係数 $f^{(h)}(a)$ が存在する．このとき，a は **h 位の零点**であるという．上で証明した結果は位数が無限大の零点は存在しないことを示している．この点で解析関数は多項式と同様な局所的ふるまいをして，多項式の場合と全く同じように，$f(z)=(z-a)^h f_h(z)$ とかけ $f_h(z)$ は解析的で $f_h(a)\neq 0$ をみたすことがわかる．

同じ状況で，$f_h(z)$ は連続だから a のある近傍で $f_h(z)\neq 0$ となり，$z=a$ はこの近傍内で唯一の零点である．いいかえると，恒等的に 0 という関数でなければ，解析関数の零点は孤立している．この性質はまた**一致の定理**として定式化される：$f(z)$, $g(z)$ を領域 Ω で解析的とし，Ω 内に集積点をもつ集合の上で $f(z)=g(z)$ とすれば，$f(z)$ は恒等的に $g(z)$ に等しい．$f(z)-g(z)$ を考えれば証明はすぐである．

とくに注意するに価する特別な場合がある：$f(z)$ が領域 Ω の部分領域で恒等的に 0 ならば Ω で恒等的に 0 になり，また，1点だけではない Ω 内の曲線上で 0 ならば Ω で恒等的に 0 になる．解析関数は，それが解析的であるような領域に集積点をもつ集合をとると，その上の値だけで一意的にきまってしまうといってもよい．これは，関数の値を具体的に計算する方法をわれわれが持っている，という意味ではない．

次に，a 自身は除いて a の近傍で解析的な関数 $f(z)$ を考える．いいかえると，$f(z)$ は領域 $0<|z-a|<\delta$ で解析的である．点 a をこのとき $f(z)$ の**孤立特異点**という．除去可能特異点の場合にはすでに扱った．そのときは，円板 $|z-a|<\delta$ で $f(z)$ が解析的になるように $f(a)$ を定義でき，これ以上考える必要はない†．

$\lim_{z\to a} f(z)=\infty$ のとき，a は $f(z)$ の**極**であるといい $f(a)=\infty$ とかく．このとき，$0<|z-a|<\delta'$ で $f(z)\neq 0$ となるように $\delta'\leqq\delta$ がとれる．そこで $g(z)=1/f(z)$ は定義でき解析的である．$g(z)$ の a での特異点は除去可能であるから，$g(z)$ は a に解析的に延長され $g(a)=0$ である．$g(z)$ は恒等的に 0 という関数ではないから，a での零点は有限位数であり，$g(z)=(z-a)^h g_h(z)$, $g_h(a)\neq 0$ とかける．h を極の**位数**という．$f_h(z)=1/g_h(z)$ は解析的で $f_h(a)\neq 0$ であり，$f(z)$ は $f(z)=(z-a)^{-h}f_h(z)$ と表される．ゆえに，極での性質はちょうど有理関数の場合と同様である．

領域 Ω において極を除いて解析的である関数 $f(z)$ を，Ω で**有理形**という．もっときっちりいうと，各 $a\in\Omega$ に対し次のような Ω に含まれる近傍 $|z-a|$

---

† a が除去可能特異点のとき，$f(z)$ は a で**正則**であるとしばしばいってしまう；正則という言葉は，ときどき解析的の同義語として使われる．

$<\delta$ がとれることである：$f(z)$ はその近傍全体で解析的か，または $0<|z-a|<\delta$ で解析的で孤立特異点 a は極になっている．有理形関数の極は定義により孤立していることを確めてほしい．Ω における2つの解析関数の商 $f(z)/g(z)$ は，$g(z)$ が恒等に0という関数でなければ，Ω で有理形関数である．極になる可能性があるのは $g(z)$ の零点だけであるが，$f(z)$ と $g(z)$ の共通零点は除去可能特異点になるかもしれない．この場合，商の関数値は連続性からきめられる．もっと一般に，2つの有理形関数の和，積，商はまた有理形である．ここで，恒等的に∞という有理形関数を認めないのなら，分母が恒等的に0になることは除かねばならない．

孤立特異点をもっと詳しく議論するために，実数 α に対し (1) $\lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha}\cdot|f(z)|=0$, (2) $\lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha}|f(z)|=\infty$ という条件を考える．もしある α に対し(1)が成り立てば，それより大きな α に対しても成り立ち，ゆえにある整数 m に対し成り立つ．$(z-a)^m f(z)$ は $z=a$ で除去可能特異点で値は0になる．$f(z)$ は恒等的に0か，このときはすべての α に対し(1)が成り立つが，または $(z-a)^m f(z)$ は有限位数 k の零点を a でもつ．後者のときは，$\alpha>h=m-k$ ならば(1)が成り立つし，$\alpha<h$ ならば(2)が成り立つ．次に，ある α に対し(2)が成立したと仮定するとそれよりも小さい α に対しても成立し，ゆえにある整数 n に対し(2)が成立する．関数 $(z-a)^n f(z)$ は有限位数 l の極をもち，$h=n+l$ とおくとまた $\alpha>h$ なら(1)が成り立ち $\alpha<h$ なら(2)になる．これで3つの場合が起ることがわかる：(i) 条件(1)がすべての α に対し成立し，$f(z)$ は恒等的に0である；(ii) 整数 h が存在し，$\alpha>h$ ならば(1)が成立し $\alpha<h$ なら(2)が成立する；(iii) 任意の α に対し(1)も(2)も成立しない．

(i)のときは面白くない．(ii)の場合，h を点 a での $f(z)$ の**代数的位数**という．それは極のときに正，零点のときに負であり，0になるのは a で $f(z)$ が解析的で $\neq 0$ となっているときである．顕著なことに，代数的位数はいつも整数である；1価解析関数は $|z-a|$ の分数乗と同位の無限小または無限大となることはない．

h 位の極の場合，解析関数 $(z-a)^h f(z)$ に定理8を適用する．$z=a$ で解析的な $\varphi(z)$ があり，次の形の展開をうる：

$$(z-a)^h f(z)=B_h+B_{h-1}(z-a)+\cdots+B_1(z-a)^{h-1}+\varphi(z)(z-a)^h.$$

$z\neq a$ のとき $(z-a)^h$ で両辺を割ることができて,

$$f(z)=B_h(z-a)^{-h}+B_{h-1}(z-a)^{-h+1}+\cdots+B_1(z-a)^{-1}+\varphi(z)$$

をうる. この展開の $\varphi(z)$ を除いた部分を $f(z)$ の $z=a$ における**特異部**または**主要部**という. したがって, 極には位数ばかりでなく特異部もきまる. 同じ特異部をもつ2つの関数の差は a で解析的になる.

(iii)の場合に点 a を**真性孤立特異点**という. 真性特異点の近傍においては, $f(z)$ は非有界でもあり同時に0にいくらでも近づくこともできる. 真性特異点の近傍における関数の複雑なふるまいの特徴づけとして, ワイエルシュトラスによる次の古典的な定理を証明する:

定理 9. 解析関数は真性特異点の任意の近傍内で任意の複素数値にいくらでも近づきうる.

主張を否定すると, 複素数 A と $\delta>0$ をみつけ, a のある近傍で ($z=a$ は除き) $|f(z)-A|>\delta$ をみたすようにできる. このとき $\alpha<0$ に対し, $\lim_{z\to a}|z-a|^\alpha\cdot|f(z)-A|=\infty$ となり, a は $f(z)-A$ の真性特異点ではない. ゆえに, $\lim_{z\to a}|z-a|^\beta|f(z)-A|=0$ となる β が存在し, さらに $\beta>0$ にとることができる. すると $\lim_{z\to a}|z-a|^\beta|A|=0$ だから $\lim_{z\to a}|z-a|^\beta|f(z)|=0$ となり, a は $f(z)$ の真性特異点でなくなってしまう. これで定理は証明できた.

孤立特異点の考えは, ∞ の近傍 $|z|>R$ で解析的な関数にも適用できる. $f(\infty)$ は定義されていないから ∞ を孤立特異点として扱い, $g(z)=f(1/z)$ の $z=0$ での特異点がどうであるかにより ∞ が除去可能特異点, 極, 真性特異点の性質をもつという. 孤立特異点 ∞ が真性でなければ, $\lim_{z\to\infty}z^{-h}f(z)$ が存在し0でも無限大でもないような, 代数的位数 h が存在する. 極のときは, 特異部は z の多項式になる. ∞ が真性特異点ならば, ∞ の各近傍で定理9でのべた性質を $f(z)$ はもつ.

問　題

1. $f(z), g(z)$ の $z=a$ での代数的位数を h, k とすると，fg の代数的位数は $h+k$ f/g の代数的位数は $h-k$ となり，$f+g$ の代数的位数は $\max(h, k)$ 以下であることを示せ.
2. 全平面での解析関数が∞を真性特異点としなければ，その関数は多項式になってしまうことを示せ.
3. $e^z, \sin z, \cos z$ は∞を真性特異点とすることを示せ.
4. 拡張された平面全体で有理形な関数は，有理関数であることを示せ.
5. $f(z)$ の孤立特異点は，$\mathrm{Re}\,f(z)$ または $\mathrm{Im}\,f(z)$ が上に有界または下に有界のとき，除去可能特異点になることを示せ．ヒント：1次分数変換を行う.
6. $f(z)$ の孤立特異点は $\exp f(z)$ の極になりえないことを示せ．ヒント：f と e^f は共通の極をもちえない(何故か？)．定理9を応用する.

3.3. 局所写像

解析関数の零点の個数をかぞえる一般の公式の証明から始めよう．開円板 Δ での解析関数 $f(z)$ を考える．γ は Δ 内の閉曲線で γ 上では $f(z)\neq 0$ とする．簡単にするためにまず $f(z)$ の Δ 内の零点は有限個とし，位数 k の零点は k 個だけ別の番号をふって同じ点を並べることにして，Δ 内の零点を $z_1, z_2, \cdots, z_n$ とかく.

定理8，というよりはむしろその結果の(30)をくり返し用いて，Δ で解析的で $\neq 0$ の解析関数 $g(z)$ があり $f(z)=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)g(z)$ とかける．対数微分をすることにより，$z\neq z_j$ に対し，とくに γ の上で

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\cdots+\frac{1}{z-z_n}+\frac{g'(z)}{g(z)}$$

をうる．Δ で $g(z)\neq 0$ だから，コーシーの定理より

$$\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz=0$$

である．$n(\gamma, z_j)$ の定義を思い出すと，次の式をうる：

$$n(\gamma, z_1)+n(\gamma, z_2)+\cdots+n(\gamma, z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz. \tag{31}$$

これは $f(z)$ が Δ 内に無限個の零点をもつときにも正しい．γ が Δ より小

さい同心円 $\varDelta'$ に含まれることは明らかである．$f(z)$ が恒等的に 0 でなければ（この場合は当然除いておかなければならない），$\varDelta'$ の中には有限個しか零点はありえない．もし無限個あれば，ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理により $\varDelta'$ の閉包の中に集積点をもち，これは起りえないからである．$\varDelta'$ の外にある零点に対しては $n(\gamma, z_j)=0$ となり(31)の和には影響しない．これで次の定理を示した：

定理 10. 開円板 $\varDelta$ で解析的で恒等的に 0 ではない関数 $f(z)$ の零点を z_j とする．ただし，その位数だけ同じ点を重複して並べる．γ を $\varDelta$ 内の閉曲線で零点を通らないものとすると，

$$\sum_j n(\gamma, z_j)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \tag{32}$$

が成り立つ．この和は，0 でない項は有限個で有限和である．

関数 $w=f(z)$ は γ を w-平面内の閉曲線 Γ に写し，次の式が成り立つ：

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w}=\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

ゆえに，公式(32)は次の意味をもつ：

$$n(\Gamma, 0)=\sum_j n(\gamma, z_j). \tag{33}$$

簡単でもっとも役に立つ場合は，$n(\gamma, z_j)$ は 0 か 1 かそのどちらかに限ることが事前にわかっているときである．そのときは，(32)は γ で囲まれた零点の総数に関する公式となる．γ が円周ならば明らかにこの場合である．

a を任意の複素数とし $f(z)-a$ に定理10を適用しよう．$f(z)-a$ の零点は方程式 $f(z)=a$ の根であり，それを $z_j(a)$ とかく．(32)の代りに，公式

$$\sum_j n(\gamma, z_j(a))=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}dz$$

がえられ，(33)は

$$n(\Gamma, a)=\sum_j n(\gamma, z_j(a))$$

となる．もちろん，γ 上で $f(z) \neq a$ という仮定は必要である．

a, b が Γ できまる同じ領域に入っていれば $n(\Gamma, a)=n(\Gamma, b)$ となることを知っている．ゆえに，$\sum_j n(\gamma, z_j(a))=\sum_j n(\gamma, z_j(b))$ である．γ が円周ならば，γ の内部において $f(z)=a$ と $f(z)=b$ は同数の根をもつことがわかる．局所対応に関する次の定理は，この結果の直接の系である．

定理 11． $f(z)$ は z_0 で解析的で $f(z_0)=w_0$ とし，$f(z)-w_0$ は z_0 で n 位の零点をもつと仮定する．このとき，$\varepsilon>0$ を十分小さくとれば，対応して $\delta>0$ が存在し，次のようにできる：

$|a-w_0|<\delta$ をみたす任意の a に対し，方程式 $f(z)=a$ は，円板 $|z-z_0|<\varepsilon$ の中にちょうど n 個の根をもつ．

ε は，$|z-z_0| \leqq \varepsilon$ で $f(z)$ が定義され解析的で，$f(z)-w_0$ の零点がこの円内で z_0 だけであるようにとる．γ は円 $|z-z_0|=\varepsilon$ とし，$w=f(z)$ によるその像を Γ とする．w_0 は閉集合 Γ の外にあるから，Γ と交わらないような近傍 $|w-w_0|<\delta$ がとれる(図4-7)．この近傍内のすべての a は，γ の内部で同じ個数とられることはすぐにわかる．方程式 $f(z)=w_0$ は γ の内部にちょうど n 個の根(z_0 に重なっている)をもつから，各 a は n 回とられることになる．重根は重複度だけかぞえることにしているのだが，ε を十分小さくとれば $a \neq w_0$ のとき $f(z)=a$ の根はすべて単根になるようにできる．実際，$f'(z)$ が $0<|z-z_0|<\varepsilon$ で 0 にならないようにとればよい．

系 1． 定数でない解析関数による開集合の像はまた開集合である．

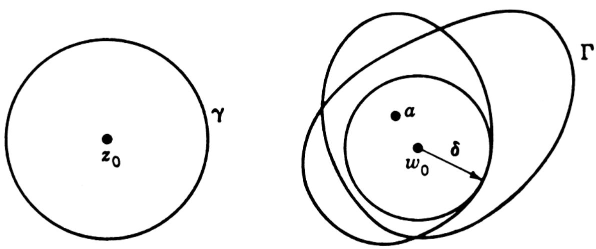


図4-7　局所対応

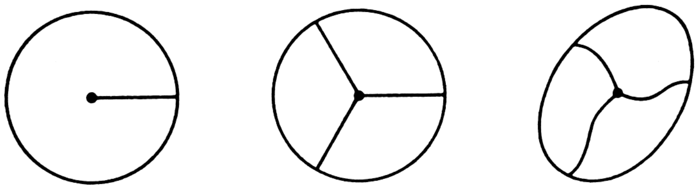


図4-8　分岐点：$n=3$

これは，十分小さな円 $|z-z_0|<\varepsilon$ の像が，近傍 $|w-w_0|<\delta$ を含むことをいいかえたにすぎない．

$n=1$ のときには，円 $|w-w_0|<\delta$ と $|z-z_0|<\varepsilon$ の開部分集合 Δ との間の1対1対応がある．z-平面の開集合に w-平面の開集合が対応するから $f(z)$ の逆関数は連続で，写像は位相写像になる．写像は Δ に含まれる z_0 の近傍に制限してもよく，次のようにいえる：

系 2. $f(z)$ が z_0 で解析的で $f'(z_0)\neq 0$ ならば，$f(z)$ は z_0 のある近傍をある領域の上へ位相的にかつ等角に写す．

逆関数の連続性から，いつもの方法で逆関数が解析的であることがいえ，逆写像も等角になる．逆に，局所写像が1対1ならば，定理11は $n=1$ でのみ成立し，ゆえに $f'(z_0)\neq 0$ でなければならぬ．

$n>1$ のときも局所対応は明確にのべることができる．定理11の仮定の下で，$g(z)$ は z_0 で解析的，$g(z_0)\neq 0$ として

$$f(z)-w_0=(z-z_0)^n g(z)$$

とかける．$\varepsilon>0$ を，$|z-z_0|<\varepsilon$ で $|g(z)-g(z_0)|<|g(z_0)|$ となるようにとる．この近傍で $\sqrt[n]{g(z)}$ の1価解析的な枝を定義することができ，それを $h(z)$ とかく．これで，

$$f(z)-w_0=\zeta(z)^n,$$
$$\zeta(z)=(z-z_0)h(z)$$

とかける．$\zeta'(z_0)=h(z_0)\neq 0$ であるから写像 $\zeta=\zeta(z)$ は z_0 のある近傍で位相的である．一方，写像 $w=w_0+\zeta^n$ は初等的写像であり，各 w に対し ζ の等

間隔におかれた n 個の点がきまる． 2段階で写像を行うことにより，局所対応の非常に啓蒙的な図がかける．図4-8は，小円板の逆像と正の半径の上に写る n 個の曲線を示している．

問 題

1. 写像 $w=z^2+z$ により1対1に写るような，原点中心の最大の円板を求めよ．
2. $w=e^z$ に対し前問と同じ．
3. $z_0=0$ とし，$\cos z$ に対し $f(z)=w_0+\zeta(z)^n$ という表示を適用する．$\zeta(z)$ を具体的に求めよ．
4. $f(z)$ は原点で解析的で $f'(0)\neq 0$ とする．0 の近傍で，$f(z^n)=f(0)+g(z)^n$ をみたすような解析関数 $g(z)$ の存在を証明せよ．

3.4. 最大値の原理 定理11系1から解析関数の最大値の原理という重要な結果が導かれる．その単純さとはっきりした定式化のために，それは関数論のもっとも有用な一般的定理の1つである．概して最大値の原理にもとづく証明は非常に率直であり，この種の証明が好まれるのも当然である．

定理 12.（最大値原理） $f(z)$ は領域 Ω で解析的とする．そのとき，定数関数でなければ，絶対値 $|f(z)|$ は Ω において最大値をもたない．

証明は簡単である．$w_0=f(z_0)$ を Ω でとられる任意の値とすると，ある近傍 $|w-w_0|<\varepsilon$ は Ω の像に含まれる．この近傍の中には絶対値が $>|w_0|$ の点を含むから，$|f(z_0)|$ は $|f(z)|$ の最大値ではありえない．

肯定的な文章で本質的に同じことをかくと次の定理になる：

定理 12′. $f(z)$ が有界閉集合 E の上で連続で E の内部では解析的とすると，$|f(z)|$ は E の境界上で最大値をとる．

E はコンパクトだから，$|f(z)|$ は E 上で最大値をもつ．それを点 z_0 でとったとしよう．z_0 が境界上にあれば，証明することは何もない．z_0 が内点のとき，$|f(z_0)|$ は E に含まれる円板 $|z-z_0|<\delta$ での $|f(z)|$ の最大値でもある．しかし，z_0 を含む E の内点集合の成分の上で $f(z)$ が定数でなければ，

これは不可能である．連続性から，その成分の境界全部の上で $|f(z)|$ はその最大値に等しくなる．この境界は空集合ではなく E の境界に含まれる．ゆえに，最大値はいつも E のある境界点でとるといってよい．

最大値の原理はコーシーの積分公式を使って解析的に証明することもできる．γ を中心 z_0，半径 r の円として，公式(22)を $z=z_0$ に対して書くと，γ は $\zeta=z_0+re^{i\theta}$ とかけ $d\zeta=ire^{i\theta}d\theta$ となるから

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta \tag{34}$$

をうる．この式は関数が解析的である領域に閉円板 $|z-z_0|\leqq r$ が含まれているとき，解析関数の円の中心での値は円周上の値の算術平均に等しいことを示している．

(34)から不等式

$$|f(z_0)|\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|d\theta \tag{35}$$

がえられる．$|f(z_0)|$ が最大値であるとしよう．すると，$|f(z_0+re^{i\theta})|\leqq|f(z_0)|$ であり，もしある θ で本当に不等号が成立すると連続性からその近傍でも不等号となる．そのときは $|f(z_0+re^{i\theta})|$ の平均値は $|f(z_0)|$ より小さく，(35)より $|f(z_0)|<|f(z_0)|$ となり矛盾である．したがって，$|f(z)|$ は十分小さいすべての円 $|z-z_0|=r$ の上で恒等的に $|f(z_0)|$ に等しくなければならず，ゆえに z_0 のある近傍でそうなる．これから容易に $f(z)$ が定数になってしまうことがわかる．これで，最大値の原理の別証ができた．第一の証明を優先させたのは，最大値の原理が解析関数による写像の位相的性質にもとづいていることを，その証明は示しているからである．

関数 $f(z)$ が開円板 $|z|<R$ で解析的で閉円板 $|z|\leqq R$ で連続な場合を考えよう．$|z|=R$ の上で $|f(z)|\leqq M$ がわかっておれば，$|z|<R$ で $|f(z)|\leqq M$ が成り立つ．等号は $f(z)$ が定数で絶対値が M のときだけ成り立つ．ゆえに，$f(z)$ が M より小さい絶対値のある値をとることがわかれば，もっと良い評価があるかもしれない．この趣旨の定理は非常に有用である．次の結果は**シュヴァルツの補題**とよばれる：

定理 13. $|z|<1$ で $f(z)$ は解析的で条件 $|f(z)|\leqq 1, f(0)=0$ をみたすとする．そのとき， $|f(z)|\leqq|z|, |f'(0)|\leqq 1$ が成り立つ． 1点 $z_0\neq 0$ で $|f(z_0)|=|z_0|$ となるか，または $|f'(0)|=1$ となれば，絶対値1の定数 c があり $f(z)=cz$ となる．

$z\neq 0$ で $f(z)/z$ に等しく $z=0$ では $f'(0)$ に等しい関数 $f_1(z)$ をとり， 最大値の原理を用いる． 円 $|z|=r<1$ の上では絶対値が $\leqq 1/r$ であり， ゆえに $|z|\leqq r$ で $|f_1(z)|\leqq 1/r$ である． r を1に近づけて，すべての z に対し $|f_1(z)|\leqq 1$ がえられ，これが定理の主張である．等号が1点で成り立てば，それは $|f_1(z)|$ が最大値をとったことを意味し， $f_1(z)$ は定数にならなければならない．

定理13のかなり特殊な仮定は本質的ではなく，正規化した結果とみるべきである． 例えば， $f(z)$ が半径 R の円板で定理の条件をみたしておれば， $f(Rz)$ に定理のもとの形が適用できる．結果として $|f(Rz)|\leqq|z|$ をうるが，これは $|f(z)|\leqq|z|/R$ とかきなおせる．同様に， $|f(z)|$ の上界が1でなく M ならば $f(z)/M$, またはもっと一般に $f(Rz)/M$ に定理を適用する．えられる不等式は $|f(z)|\leqq M|z|/R$ となる．

なおもっと一般に，条件 $f(0)=0$ も任意に $f(z_0)=w_0, |z_0|<R, |w_0|<M$ としてもよい． $\zeta=Tz$ を1次変換で $|z|<R$ を $|\zeta|<1$ の上へ写し z_0 を原点へもっていくものとし， Sw を1次変換で $|w|<M$ を $|Sw|<1$ の上へ写し $Sw_0=0$ をみたすものとする． 関数 $Sf(T^{-1})$ は明らかにもとの定理の仮定をみたす． ゆえに， $|Sf(T^{-1}\zeta)|\leqq|\zeta|$ が成り立ち， $|Sf(z)|\leqq|Tz|$ である． はっきりかくと，これは次の形でかける:

$$\left|\frac{M(f(z)-w_0)}{M^2-\bar{w}_0 f(z)}\right|\leqq\left|\frac{R(z-z_0)}{R^2-\bar{z}_0 z}\right|. \tag{36}$$

問　題

1. (36)を用いるか，または直接に， $|z|\leqq 1$ のとき $|f(z)|\leqq 1$ とすれば

$$\frac{|f'(z)|}{(1-|f(z)|^2)}\leqq\frac{1}{1-|z|^2}$$

となることを示せ．

2. $\mathrm{Im}\, z>0$ で $f(z)$ は解析的で $\mathrm{Im}\, f(z)\geqq 0$ とすると，次の2つの不等式が成り立つことを示せ：

$$\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|f(z)-\overline{f(z_0)}|}\leqq\frac{|z-z_0|}{|z-\bar{z}_0|},\quad \frac{|f'(z)|}{\mathrm{Im}\, f(z)}\leqq\frac{1}{y}\quad (z=x+iy).$$

3. 問1，問2で等号が成立すれば $f(z)$ は1次変換になることを示せ.

4. $f(z)$ が $|z|<1$ を上半平面へ写すとき，対応する不等式を導け.

5. シュヴァルツの補題を用いて，円板をもう1つの円板(または上半平面)の上へ写す等角写像は1次変換であることを証明せよ.

***6.** γ を $|z|<1$ に含まれる区分的微分可能な曲線とするとき，

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

を γ の非ユークリッド的長さ(または双曲的長さ)という．$|z|<1$ で $|f(z)|<1$ をみたす解析関数は，各 γ を非ユークリッド的長さが γ のそれ以下であるような曲線の上に写すことを示せ.

単位円を自身の上へ写す1次変換は非ユークリッド的長さを保存することを導け．また，直接の計算によりその結果を確かめよ.

***7.** 単位円の与えられた2点を結ぶ非ユークリッド的長さが最小の曲線は，単位円周と直交する円弧であることを証明せよ．（1次変換を用いて，1端点を原点へ，もう1つの端点を正の実軸上に写し考えよ).

最小の非ユークリッド的長さを2点の**非ユークリッド距離**という．z_1 と z_2 との非ユークリッド距離を求めよ．答：

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}.$$

***8.** 上半平面での非ユークリッド的長さはどのように定義したらよいか.

4. コーシーの定理の一般形

コーシーの定理と積分公式を今迄は円の場合だけを考えてきた．解析関数の局所的性質を調べる目的にはこれで十分であったが，もっと一般的な見地からは一見して不完全とわかる結果では満足できない．一般化には2つの方向がある．1つはコーシーの定理がつねに成り立つような領域の特徴づけを

求めることである．もう1つは，領域は任意にしておいてコーシーの定理の主張が成り立つような曲線 γ を求めることである．

4.1. チェインとサイクル　最初に線積分の概念を一般化する．このために，$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ が曲線 γ の分割のときには正しい式

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f\,dz \tag{37}$$

を検討する．(37)の右辺は曲線の任意の有限個の集合に対して意味をもつから，つないで1つの曲線にならなくても形式的な和 $\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n$ を考えて困ることはなく，それに対し(37)により対応する積分を定義する．このような曲線の形式的な和を**チェイン**という．任意のチェインの上の線積分を考えることにより失われるものは何もなく，得るものは多くあるだろう．

曲線を分割する仕方は様々あり一意的でないように，異なる形式的和が同じチェインを表わしうることは明らかである．指導原理は，すべての関数 f に対し線積分の値が等しくなるような2つのチェインは等しいと考えようというのである．この原理を分析すると，次の操作はチェインの相等性を変えないことがわかる：(1) 2つの曲線の順番をいれかえる，(2) 1つの曲線を部分曲線の有限和に分割する，(3)部分曲線を1つの曲線につなぐ，(4)曲線の助変数の変更，(5)逆向きの曲線を打ち消すこと．これを基礎にして，チェインが等しいということを形式的に定義する論理的な同値関係を，定式化することは容易であろう．その状況に論理的なおとし穴があると思えないので，定式化は省略する．

2つのチェインの和はそれを並列して書く明らかな方法で定義する．線積分の加法性(37)が任意のチェインに対しても正しいことは明らかである．等しいチェインを加えたときには，和を倍としてかくのが便利である(つまり，$\gamma+\gamma$ を 2γ というようにかく)．この記号を用いると任意のチェインは

$$\gamma = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \cdots + a_n\gamma_n \tag{38}$$

という形でかける．ここで，a_j は正整数で，γ_j はすべて相異なる曲線であ

る．逆向きの曲線に対し $a(-\gamma)=-a\gamma$ とかき，(38)をさらに簡約してどの2つの γ_j も逆向きでないようにできる．係数は任意の整数となり，係数が0の項は随意に加えてよい．係数が0の項を考えると，2つのチェインを同じ曲線を用いて表すことができ，その和は対応する係数をそれぞれ加えればよい．零チェインは空集合の和とも係数がみな0の和ともいえる．

閉曲線の和として表せるチェインを**サイクル**という．非常に簡単な組合せ論的考察により，チェインがサイクルになるための必要十分条件は，どのように表示しても個々の曲線の始点と終点とが対になって等しい*ことであるといえる．これで，チェインがサイクルであるかどうかをすぐにいうことができる．

応用においては，与えられた領域に含まれているようなチェインを考える．この意味はそのチェインが Ω に含まれている曲線により表示でき，そしてそのような表示だけを考えるということである．明らかに，これまで領域内の閉曲線に対してのべた定理はすべて領域内のサイクルに対しても正しい．とくに，サイクル上での完全微分の積分は0になる．

サイクルに関する点の指数は，1つの閉曲線の場合とまったく同じように定義される．それは同じ性質をみたし，さらに，自明であるが，しかし重要な加法性 $n(\gamma_1+\gamma_2, a)=n(\gamma_1, a)+n(\gamma_2, a)$ をみたす．

4.2. 単連結

穴があいていない領域といえばそれが何を意味するか，読者は間違いなくわかってくれるであろう．そのような領域を**単連結領域**といい，単連結領域ではコーシーの定理がいつも成り立つのである．われわれが用いた暗示的な言葉は数学的な定義ではありえないが，幸いにも正確にする為に必要なことはほんの少ししかない．実際，穴のない領域というのは補集合がただ1つの部分からなっている．これで次の定義に到達する：

定義 1. 領域は，拡張された平面で考えて補集合が連結なとき，**単連結**であるという．

---

*) $\gamma=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j$ とし γ_j の始点を p_j, 終点を q_j とすると，$p_1=q_{j_1}, p_2=q_{j_2}, \cdots, p_n=q_{j_n}$, $\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}=\{1, 2, \cdots, n\}$ とできるという意味である．(訳注)

読者にこの定義は通常用いられているものとは違うということを注意しておく．その主な理由はこの定義は実2次元より高次元では用いられないからである．これからの勉強の過程で，定義1でのべた性質が，だいたい同様に重要ないくつかの他の性質と同値であることがわかるだろう．その一つに，任意の閉曲線が1点に連続変形できるというのがあり，この条件が普通は定義として採用される．われわれの定義は，複素積分の本質的な結果に速やかに到達できるという利点がある．

開円板，半平面，平行な帯などが単連結であることはすぐわかる．平行な帯は，補集合を拡張された平面で考えるということの重要さを示している．複素平面での平行な帯の補集合は連結ではない．リーマン球面上の領域にも定義は適用でき，そこではどの点も平等である．にもかかわらず，とくにはっきりとことわらない限り，領域といえば複素平面に含まれているものに限ると約束した方がわれわれの目的の為にはよい．この約束にしたがうと，円の外部は単連結ではない．その補集合は閉円板と無限遠点とからなるからである．

定理 14. 領域 Ω が単連結になるための必要十分条件は，Ω 内の任意のサイクルと Ω に属さない任意の点 a に対し $n(\gamma, a)=0$ となることである．

このいいかえた条件も非常に暗示的である．単連結領域内の閉曲線はその領域に属さない点をまわることはできないということを示している．穴のあいた領域の場合には，この条件がみたされないことはまったく明らかと思われる．

必要条件であることはほとんど自明である．γ を Ω 内の任意のサイクルとしよう．Ω の補集合は連結だから γ のきめる領域の1つに含まれねばならず，∞ は補集合に属しているから非有界になる．ゆえに，∞ でない Ω の補集合の各点 a に対し $n(\gamma, a)=0$ である．

十分性をきちんと証明する為には，はっきりと構成することが必要である．Ω の補集合が $A \cup B$ と交わらない2つの閉集合の和で表されたと仮定する．この集合の一方は ∞ を含み，したがって他方は有界である；A を有界とし

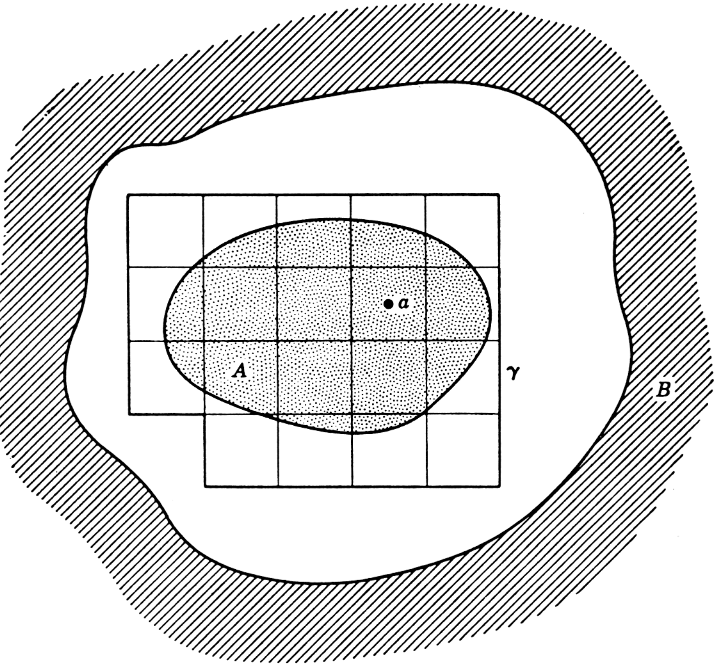


図4-9　指数1の曲線

よう．A と B の最短距離 δ は >0 である．全平面を1辺の長さが $<\delta/\sqrt{2}$ の正方形 Q の網目でおおう．A の1点 a が正方形の中心になるように網目をとることはできる．Q の境界曲線を ∂Q とかく；Q はふちまでいれて閉集合と考えており，∂Q の向きは進行左側に Q の内部がくるようにしている．

A と共通点をもつような網目の正方形 Q_j のすべてに対し和をとって

$$\gamma = \sum_j \partial Q_j \tag{39}$$

というサイクルを考える(図4-9)．点 a はこれらの正方形の1つだけに含まれるから明らかに $n(\gamma, a)=1$ である．さらに，γ が B と交わらないことも明らかである．もし打ち消し合える所を打ち消してしまうと，γ が A とも交わらないことは同様に明らかである．実際，A と交わる辺は，和(39)に含まれる2つの正方形の共通辺であり向きが互いに逆であるから，打ち消し合いをしてしまったあとの γ には現れない．ゆえに γ は Ω に含まれ，定理

は証明できた.

コーシーの定理は単連結でない領域では確かに正しくないことを注意しておく. 実際, Ω に属さない点 a と Ω 内のサイクルで $n(\gamma, a)\neq 0$ のものがあれば, $1/(z-a)$ は Ω で解析的になるが, 一方

$$\int_{\gamma}\frac{dz}{z-a}=2\pi i\cdot n(\gamma, a)\neq 0$$

である.

4.3 ホモロジー　単連結性の定理14による特徴づけは, 単連結領域ではすべてのサイクルが充たすが, 任意の領域または開集合ではサイクルが充たすか充たさないかわからないような, 一つの性質をみちびいた. この性質はトポロジーで重要な役割をもち, そのために特別な名前をつける.

定義 2. 開集合 Ω 内のサイクル γ が, Ω に関し **0 にホモローグ**というのは, Ω の補集合のすべての点 a に対し $n(\gamma, a)=0$ となることである.

これを記号で $\gamma\sim 0 \pmod{\Omega}$ とかく. どの開集合に関してかが明らかなときには, Ω をいちいち云わなくてもよい. $\gamma_1\sim\gamma_2$ とかけば $\gamma_1-\gamma_2\sim 0$ のことである. ホモロジーは加法と減法ができ*, $\Omega'\supset\Omega$ のとき $\gamma\sim 0 \pmod{\Omega}$ ならば $\gamma\sim 0 \pmod{\Omega'}$ である.

また, われわれの用語は標準的に用いられているものと一致しているとはいえない. 回転数が0ということによるホモロジーの特徴づけが, コーシーの定理の一般形に必要なものとしっくり合うことを発見したのは, E. アルチンである. この考えは昔の証明をいちぢるしく簡単にした.

4.4. コーシーの定理の一般な形　コーシーの定理の最終的な形を述べることは, 今や容易である.

*) $\gamma_1\sim\gamma_1'$, $\gamma_2\sim\gamma_2'$ ならば $\gamma_1\pm\gamma_2\sim\gamma_1'\pm\gamma_2'$ となる. この意味であろう. (訳注)

定理 15. $f(z)$ が開集合 Ω で解析的なとき，Ω に関し 0 にホモローグな任意のサイクル γ に対し次の式が成り立つ：

$$\int_{\gamma} f(z)dz=0. \tag{40}$$

いいかえると，特別な形の解析関数の族，つまり，a を Ω に属さない任意の点として関数 $1/(z-a)$ を考え，それに対し(40)が成り立つような γ があれば，Ω のすべての解析関数に対し(40)が成り立つのである．

定理14と組合せて，次の系をうる：

系 1. 単連結領域 Ω で $f(z)$ が解析的ならば，Ω 内の任意のサイクル γ に対し(40)が成り立つ．

定理を証明する前に，1·3節に関連した注意をしよう．そこで指摘したように，領域内の任意の閉曲線 γ に対し(40)が成り立つということは，fdz の線積分が道のとり方によらないことを意味し，それは fdz が完全微分であることを示す．このとき，定理1により，$F'(z)=f(z)$ をみたす1価解析関数 $F(z)$ が存在する(余分なことばであるが，強調するために‘1価’といった)．ゆえに，単連結領域では，すべての解析関数はある関数の導関数になる．

このことの特別の応用として，次の系はしばしば用いられる：

系 2. 単連結領域 Ω で $f(z)$ は解析的であり $\neq 0$ とすると，$\log f(z)$ と $\sqrt[n]{f(z)}$ の1価解析的な枝を Ω で定義することができる．

何故なら，$F'(z)=f'(z)/f(z)$ をみたす解析関数 $F(z)$ が Ω 内に存在することを知っている．関数 $f(z)e^{-F(z)}$ の導関数は0であり，ゆえにこれは定数である．1点 $z_0\in\Omega$ をとり $\log f(z_0)$ の無限個ある値のうちの1つをとると，

$$e^{F(z)-F(z_0)+\log f(z_0)}=f(z)$$

となり，したがって $\log f(z)=F(z)-F(z_0)+\log f(z_0)$ とおくことができる．$\sqrt[n]{f(z)}$ を定義するのには，これを $\exp((1/n)\log f(z))$ とかきなおせばよい．

4.5. コーシーの定理の証明[†]　定理14の証明のときと平行に，構成をすることから始める．まず，Ω は有界と仮定し，そのほかは何も仮定しない．$\delta>0$ を与え，平面を1辺の長さ δ の正方形の網でおおい，Ω に含まれる網の閉正方形を $Q_j, j\in J$ とかく．Ω は有界としたから J は有限集合で，δ を小さくしておけば空集合ではない．$Q_j, j\in J$ の集合は閉集合で，その境界に向きをつけて考えれば，サイクル

$$\Gamma_\delta=\sum_{j\in J}\partial Q_j$$

となる．明らかに，Γ_δ は有向線分の和となり，その各線分は1つの，そしてただ1つの Q_j の辺である．和集合 $\cup Q_j$ の内部を Ω_δ とかくことにする．

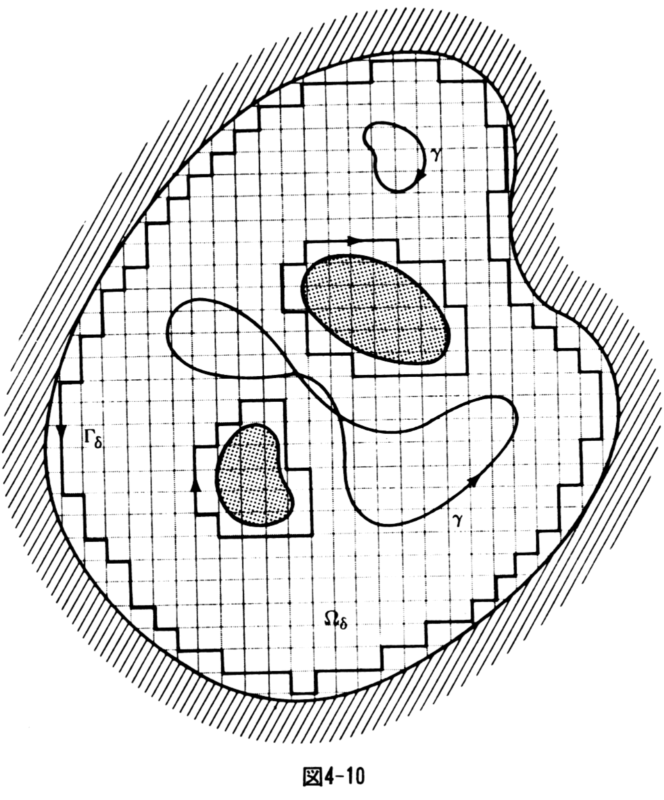


図4-10

†) この証明は A. F. Beardon の示唆による．それをここで用いることを，彼は許してくれた．

(図4-10).

γ を Ω で0にホモローグなサイクルとしよう．γ が Ω_δ に含まれるように，δ を小さくとる．点 $\zeta\in\Omega-\Omega_\delta$ を考える．それは，$Q_j, j\in J$ ではない閉正方形 Q にぞくする．Ω の点ではない $\zeta_0\in Q$ が存在し，ζ と ζ_0 を線分で結ぶと，その線分は Q 内にあり，したがって Ω_δ とは交わらない．γ は点集合として Ω_δ に含まれるから，これから $n(\gamma,\zeta)=n(\gamma,\zeta_0)=0$ がわかる．とくに，Γ_δ 上の任意の点 ζ に対し，$n(\gamma,\zeta)=0$ である．

さて，f は Ω で解析的と仮定しよう．z を例えば Q_{j_0} の内点とすると，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_j}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}f(z), & j=j_0\ \text{のとき}\\ 0, & j\neq j_0\ \text{のとき}\end{cases}$$

となり，これから

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{41}$$

をうる．両辺は z の連続関数だから，この式はすべての $z\in\Omega_\delta$ で成立することがわかる．

結局，

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right)dz \tag{42}$$

がえられた．この累次積分の被積分関数は，両方の積分変数，つまり Γ_δ と γ の助変数に関し連続である．ゆえに，積分の順序変更ができる．すなわち，

$$\int_\gamma\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right)dz=\int_{\Gamma_\delta}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{\zeta-z}dz\right)f(\zeta)d\zeta$$

となる．右辺において，内側の積分は $-n(\gamma,\zeta)=0$ である．ゆえに，積分(42)は0となり，有界な Ω に対しては定理の証明ができた．

Ω が非有界のときは，γ を含むような大きな円 $|z|<R$ をとり，それと Ω との共通部分 Ω' を考える．Ω' の補集合の点 a は，Ω の補集合の点か，または円の外の点である．いずれにしても $n(\gamma,a)=0$ であり，ゆえに，$\gamma\sim0$ $(\mathrm{mod}\ \Omega')$ である．上記の証明を Ω' に適用し，任意の Ω に対し定理が正し

いことがいえる．

4.6. 局所的に完全な微分　微分 $pdx+qdy$ が Ω で局所的に完全であるというのは，Ω の各点のある近傍で完全なことである．この必要十分条件が，Ω に含まれる任意の閉多角形 R の周 $\gamma=\partial R$ に対し，

$$\int_\gamma pdx+qdy=0 \tag{43}$$

が成り立つことである．これを確めるのは難しくない（4.7節問1）．この条件は，Ω での解析関数 $f(z)$ により $pdx+qdy=f(z)dz$ と表せるときには充たされる．このときは定理15により任意のサイクル $\gamma\sim 0(\mathrm{mod}\,\Omega)$ に対し(43)が成り立つ．

定理 16. $pdx+qdy$ が Ω で局所的に完全ならば，Ω で $\gamma\sim 0$ をみたす任意のサイクル γ に対し，次の式が成り立つ：

$$\int_\gamma pdx+qdy=0$$

この一般な状況を含むように，定理15の証明を直接に修正する方法があるとは思えない．したがって，コーシーの定理の一般形の別の証明を示すことになる．この本の旧版のように，定理16のアルティンによる証明をみよう．コーシーの定理のこの別証は，特別な魅力がある．

まず，定理16の証明の前に，γ を水平と垂直な線分からなる折れ線 σ におきかえて，すべての局所完全微分の γ 上の積分と σ 上の積分が等しくなるようにできることを示す．これがいえると，Ω の補集合の点 a に対し $n(\sigma,a)=n(\gamma,a)$ となり，$\sigma\sim 0$ がわかる．これから，定理を実軸に平行な線分からなる折れ線のときに証明すればよいことになる．

γ を近似して σ を作ろう．γ から Ω の補集合への距離を ρ とする．γ の式を $z=z(t)$ とすると，関数 $z(t)$ は閉区間 $[a,b]$ で一様連続である．ゆえに，$\delta>0$ を $|t-t'|<\delta$ ならば $|z(t)-z(t')|<\rho$ となるようにとることができ，$[a,b]$ を長さ $<\delta$ の小区間に細分する．その小区間に対応する γ の部分弧

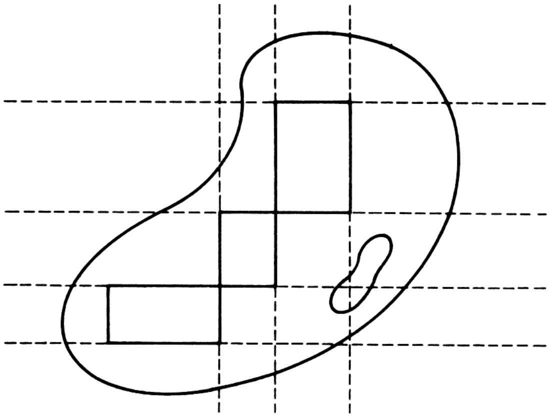


図4-11

γ_i は，Ω にすっかり入る半径 ρ の円に含まれる．γ_i の両端点をその円内で，水平，垂直な線分からなる折れ線 σ_i で結ぶことができる．その円内で微分は完全だから，

$$\int_{\sigma_i} pdx+qdy=\int_{\gamma_i} pdx+qdy$$

がなりたち，$\sigma=\sum\sigma_i$ とおくと，

$$\int_{\sigma} pdx+qdy=\int_{\gamma} pdx+qdy$$

となり，これが求めるものである．

証明を続けて，σ を構成する線分を両側にのばして無限直線にする（図4-11）．それらは，平面を有限の長方形 R_i と非有界領域 R_j' に分割するが，R_j' を無限の長方形とみなす．

各 R_i の内部に点 a_i をとり，有限の長方形全部に対し和をとって，サイクル

$$\sigma_0=\sum_i n(\sigma, a_i)\partial R_i \tag{44}$$

を作る；どの a_i も σ の上にのっていないから係数 $n(\sigma, a_i)$ に問題はない．以下の議論では，各 R_j' の内部からとった点 a_j' も用いる．

明らかに，$k=i$ のとき $n(\partial R_i, a_k)=1$ で，$k\neq i$ なら $=0$ である．同様に，すべての j に対し $n(\partial R_i, a_j')=0$ である．これらを心にとめれば，(44)から $n(\sigma_0, a_i)=n(\sigma, a_i)$, $n(\sigma_0, a_j')=0$ をうる．R_j' の内部は σ によってきまる非有界領域にぞくするから，$n(\sigma, a_j')=0$ も成り立つ．これで，すべての $a=a_i$, $a=a_j'$ に対し，$n(\sigma-\sigma_0, a)=0$ がわかった．

$\sigma-\sigma_0$ のこの性質から，互いに向きが反対でうち消される線分を無視すれば，σ_0 が σ に等しくなることを示したい．隣りあう2つの長方形 R_i, R_k の共通辺を σ_{ik} としよう；向きは R_i が σ_{ik} の左側にあるようにとる．$\sigma-\sigma_0$ のうち消しあえるものはみなうち消して，簡約した形が σ_{ik} の c 倍を含んでいると仮定しよう．すると，$\sigma-\sigma_0-c\partial R_i$ は σ_{ik} を含みえず，a_i と a_k はこのサイクルに対し同じ指数をもたねばならない．一方，各々の指数は $-c$ と 0 であり，ゆえに，$c=0$ をうる．有限の長方形 R_i と無限の長方形 R_j' の共通辺 σ_{ij} に対しても，同じことがいえる．ゆえに，有限の長方形の各辺は，$\sigma-\sigma_0$ の中に係数 0 で現れ，

$$\sigma=\sum_i n(\sigma, a_i)\partial R_i \tag{45}$$

が証明された．

さて，係数 $n(\sigma, a_i)$ が 0 でないような R_i は，Ω に含まれていることを証明しよう．閉長方形 R_i の点 a が Ω に入っていないと仮定する．すると，$\sigma\sim 0 \pmod{\Omega}$ より，$n(\sigma, a)=0$ である．一方，a と a_i を結ぶ線分は σ と交わらないから，$n(\sigma, a_i)=n(\sigma, a)=0$ である．局所完全性から，(45)に現れる ∂R_i 上の $pdx+qdy$ の積分が 0 になることがいえる．結局，

$$\int_\sigma pdx+qdy=0$$

となり，定理16は証明された．

4.7. 多重連結領域

単連結でない領域は多重連結であるという．もっと正確にいうと，Ω の補集合の連結成分が n 個のとき **n 重連結**，または**連結度**が n であるという．補集合の連結成分が無限個あるときは無限連結と

いう．直観的にいえば，n 重連結というのはリーマン球面から n 個の穴を抜いてえられるようなものである．

有限連結の場合として，Ω の補集合の連結成分を $A_1, A_2, \cdots, A_n$ とし，∞ は A_n に入っているとしよう．γ を Ω 内の任意のサイクルとすると，a を成分 A_i のどれか1つの中を動かしたときに $n(\gamma, a)$ は一定であり，A_n では $n(\gamma, a)=0$ となることが証明できる．定理14の証明で用いた作り方をまねして，サイクル $\gamma_i, i=1, \cdots, n-1$ を，$a\in A_i$ のとき $n(\gamma_i, a)=1$ で，$a\notin\Omega\cup A_i$ のとき $n(\gamma_i, a)=0$ となるように作ることができる．

Ω 内の与えられたサイクル γ に対し，$a\in A_i$ に対する $n(\gamma, a)$ の一定の数を c_i とする．Ω の外の任意の点は，サイクル $\gamma-c_1\gamma_1-c_2\gamma_2-\cdots-c_{n-1}\gamma_{n-1}$ に関し指数が0であることがわかる．いいかえると，Ω に関し

$$\gamma\sim c_1\gamma_1+c_2\gamma_2+\cdots+c_{n-1}\gamma_{n-1}$$

である．ゆえに，任意のサイクルは $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n-1}$ の1次結合にホモローグである．この1次結合は一意的に定まる．もし2つの1次結合が同じサイクルにホモローグだとすると，その差は0にホモローグなサイクルになる．しかし，サイクル $c_1\gamma_1+c_2\gamma_2+\cdots+c_{n-1}\gamma_{n-1}$ は A_i の点を c_i 回まわることは明らかである；ゆえに，すべての c_i が0にならなければ0にホモローグではありえない．

この状況をみれば，サイクル $\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}$ は領域 Ω の**ホモロジー基底**であるといってよい．ホモロジーの基底は一意的ではないが，線形代数の基本的な定理により，Ω のホモロジーのどの基底も同じ個数の元をもつ．有限個のホモロジーの基底をもつ領域は連結度が有限であり，基底の個数は連結度より1つ小さいこともいえる．

定理15より Ω での任意の解析関数 $f(z)$ に対し，

$$\int_\gamma f\,dz=c_1\int_{\gamma_1} f\,dz+c_2\int_{\gamma_2} f\,dz+\cdots+c_{n-1}\int_{\gamma_{n-1}} f\,dz$$

をうる．

$$P_i=\int_{\gamma_i} f\,dz$$

は関数にのみより γ にはよらない．これらを微分 fdz の**周期性のモジュール**，またはもっと簡単に不定積分の**周期**という*．任意のサイクルの上の $f(z)$ の積分は周期の整数係数の１次結合となり，z_0 から z までの曲線にそう積分は，周期の整数係数の１次結合だけの差を無視すれば一意的に定まることがわかった．周期が０になることが，１価な不定積分の存在のための必要十分条件である．

例として，$r_1<|z|<r_2$ で定義される円環という非常に簡単な場合を考えよう．補集合の成分は $|z|\leqq r_1$ と $|z|\geqq r_2$ である；退化した場合として $r_1=0$, $r_2=\infty$ でもよい．円環は２重連結で，ホモロジーの基底は任意の円周 $|z|=r$, $r_1<r<r_2$ である．この円周を C とかくと，円環内の任意のサイクルは $\gamma\sim nC$ となり，$n=n(\gamma,0)$ である．サイクル上の解析関数の積分は唯１つの周期

$$P=\int_C f\,dz$$

の整数倍となる．この周期は r のとり方にはもちろんよらない．

問　題

1. $pdx+qdy$ が局所的に完全であるための必要十分条件は，座標軸に平行な辺をもつ任意の閉長方形 $R\subset\Omega$ に対し，つねに

$$\int_{\partial R} pdx+qdy=0$$

になることである．定理16を用いずに，これを証明せよ．

2. 単連結領域から m 個の点を除いた領域は $m+1$ 重連結であることを証明し，そのホモロジーの基底を求めよ．

3. 閉曲線によってきまる有界領域は単連結であるが非有界領域の方は２重連結であることを示せ．

4. 原点を含まぬ単連結領域では，$\log z$, z^α, z^z の１価解析的な枝が定義できることを示せ．

5. 補集合の同じ連結成分に ±1 を含むような領域では，$\sqrt{1-z^2}$ の１価解析的な枝が定義できることを示せ．その領域で，閉曲線上の積分

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

のとりうる値は何か．

---

*) （訳注）正確には，ホモロジー基底 $\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}$ に関する微分 fdz の周期というべきであろう．

5．留数解析

前節で，閉曲線上の解析関数の線積分を求めることは周期を求めることに帰着することを示した．ある状況の下では，計算することなしに，あるいはほんの少しの計算で周期をみつけうることがわかってくる．こうして，多くの場合にあからさまな計算に頼ることなしに積分の数値を求める方法を，われわれは持っている．これは，理論の展開のためと同様に実用的にも，重要である．

この方法をより体系的にするために，留数解析とよばれる簡単な定式化が複素積分の創始者であるコーシーによって行われた．この本が採用する立場からは，4節で証明した結果を特殊な簡単な状況に応用するにすぎない．

5.1．留数定理　最初の仕事は以前の結果を4節の一般化された定理の見方でみなおすことである．明らかに，円におけるコーシーの定理の系として導かれたすべての結果は，任意の領域において0にホモローグなサイクルに対しても正しい．例えば，この応用は典型的であるが，コーシーの積分公式は次の形になる：

$f(z)$ が領域 Ω で解析的ならば，Ω で0にホモローグな任意のサイクル γ に対し，

$$n(\gamma, a)f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz$$

が成り立つ．

証明は，定理6の証明のくり返しである．これに関連して指摘しておくが，除去可能特異点のあるときに定理15を別に証明する必要はもはやない．局所的ふるまいの議論より，除去可能特異点はみな無視してよいことをすでに示したからである．

さて，関数 $f(z)$ が領域 Ω で孤立特異点を除いて解析的である場合を考えよう．最初は特異点が有限個と仮定して，それを $a_1, a_2, \cdots a_n$ とする．すべての特異点 a_j を除いた領域を Ω' とかく．

各 a_j に $\delta_j>0$ をとり，2 重連結領域 $0<|z-a_j|<\delta_j$ が Ω' に含まれるようにする．a_j を中心とし半径が $<\delta_j$ の円周 C_j をかき，

$$P_j=\int_{C_j} f(z)dz \tag{46}$$

を $f(z)$ の C_j に関する周期とする．関数 $1/(z-a_j)$ は周期 $2\pi i$ をもつ．ゆえに，$R_j=P_j/2\pi i$ とおくと，

$$f(z)-\frac{R_j}{z-a_j}$$

の周期は 0 である．このような R_j が点 a_j での $f(z)$ の留数 (residue) である．定義を次の形でもう一度のべよう：

定義 3. 孤立特異点 a での $f(z)$ の**留数**とは，ある円環 $0<|z-a|<\delta$ で $f(z)-R/(z-a)$ が 1 価な解析関数の導関数になるような，複素数 R のことである．(このような R は一意的に定まる)．

$R=\mathrm{Res}_{z=a}f(z)$ のように，他に説明を要しない記号を用いると便利である．

γ を Ω' 内のサイクルで Ω に関し 0 にホモローグなものとする．すると，γ は

$$\gamma\sim\sum n(\gamma, a_j)C_j \pmod{\Omega'}$$

をみたす．何故なら，Ω の外の点と同様に各 a_j も両方のサイクルに関し同じ指数をもつからである．ホモローグの性質により，(46)の記号を用いると

$$\int_\gamma f dz=\sum_j n(\gamma, a_j)P_j$$

が成り立ち，$P_j=2\pi i\cdot R_j$ だから，結局

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f dz=\sum_j n(\gamma, a_j)R_j$$

をうる．

特異点の個数が有限個という条件がついているが，これが**留数定理**である．一般の場合には，有限個の a_j を除いては $n(\gamma, a_j)=0$ となることをいえば，

同じ証明が適用できる．これは型にはまったやり方で示せる．$n(\gamma, a)=0$ をみたす点 a の集合は開集合で，大きな円の外側の点をすべて含む．ゆえに，その集合の補集合はコンパクトで孤立点 a_j を有限個しか含みえない．したがって，有限個の特異点に対してのみ $n(\gamma, a_j)\neq 0$ で，証明を終わる．

定理 17. $f(z)$ は領域 Ω で孤立特異点 a_j を除いて解析的とする．そのとき，Ω に関し0にホモローグでどの a_j をも通らないような任意のサイクル γ に対し，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_j n(\gamma, a_j)\mathrm{Res}_{z=a_j} f(z) \tag{47}$$

が成り立つ．

応用するときには，各 $n(\gamma, a_j)$ が0か1になる場合が多い．そのときは

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_j \mathrm{Res}_{z=a_j} f(z)$$

と簡単にかける．ここで，和は γ で囲まれた特異点全部について加える．

自由に使える簡単な留数を求める方法がなければ，留数定理は余り価値がない．真性特異点に対しては実用的価値をもつそのような方法がないので，真性特異点があるときには留数定理は比較的に用いられないが，それは驚くべきことではない．極に対しては情勢はまったく異なる．展開

$$f(z)=B_h(z-a)^{-h}+\cdots+B_1(z-a)^{-1}+\varphi(z)$$

をみて，留数は係数 B_1 に等しいことを認めるだけでよい．実際，$B_1(z-a)^{-1}$ という項を除けば，残りは明らかにある関数の導関数である．極での主要部はいつも与えられているかまたは容易にみつけうるので，留数を求める簡単な方法がこうしてえられる．

1位の極に対しては，この方法はもっと直接的になる．何故ならこのときは，留数は関数 $(z-a)f(z)$ の $z=a$ での値に等しいからである．例として，関数

$$\frac{e^z}{(z-a)(z-b)}$$

の極 $a, b \neq a$ での留数を求めよう．a での留数は明らかに $e^a/(a-b)$ であり，b での留数は $e^b/(b-a)$ である．$b=a$ とすると事情は少し複雑になる．このときは，テイラーの定理により $e^z=e^a+e^a(z-a)+f_2(z)(z-a)^2$ という形に e^z を展開する．これを $(z-a)^2$ でわることにより，$z=a$ での $e^z/(z-a)^2$ の留数は e^a であることがわかる．

注 コーシーの定理，積分公式，留数定理をもっと古典的な方法でのべると，ホモロジーも話に出ないし，指数の概念もはっきりとは使わない．その代りに，定理が適用される曲線は Ω のある部分領域の境界の全体になっているようなものにかぎられ，向きも曲線の左側にその部分領域がくるようにとる．厳密な教科書では，この直観的な概念が正確な意味をもつことを証明するのにかなりの努力が費される．この方法の主な障害は，主な論点と比べて末梢的であるかなり微妙な問題に，時間と注意をさく必要がある点である．

われわれが採用した一般的な見地から古典的な場合を遊離させることは可能であるし，また容易である．必要なのは次の定義を認めることである：

定義 4．サイクル γ が領域 Ω を囲むというのは，$n(\gamma, a)$ が任意の $a \in \Omega$ に対し 1 であり，任意の $a \notin \Omega$ に対しては定義できないかまたは 0 であること．

γ が Ω を囲み，大きい領域 Ω' が $\Omega+\gamma$ を含むならば，明らかに γ は Ω' に関し 0 にホモローグである．したがって，次の命題は定理15，17の直接の系である：

γ が Ω を囲み $f(z)$ が $\Omega+\gamma$ で解析的ならば

$$\int_\gamma f(z)dz=0$$

であり，さらに任意の $z \in \Omega$ に対し次の式が成り立つ：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

Ω 内にある孤立特異点を除いて $f(z)$ が $\Omega+\gamma$ で解析的ならば，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz=\sum_j \operatorname{Res}_{z=a_j} f(z)$$

が成り立つ．ここで，和は Ω 内の特異点 a_j に対し全部加える．

Ω を囲むサイクル γ は，Ω の集合論的な境界を含むことをみておこう．z_0 が Ω の境界点とすると，z_0 の任意の近傍は Ω の点も含むし Ω に属さない点も含む．もしその近傍が γ と交わっていないなら，$n(\gamma, z)$ はその近傍で定義でき一定になってしまう．これは定義に反し，ゆえに z_0 の近傍はすべて γ と交わることになり，γ は閉集合だから z_0 は γ の点になる．

この逆は正しくない．というのは，γ 上の点が Ω と交わらないような近傍をもつことはありうるからである．γ を Ω の境界とちょうど一致するようにとろうと試みるのは当然だろうが，コーシーの定理とそれに関連した考察のためにはこれは必要ではない．

5.2. 偏角の原理　コーシーの積分公式を留数定理の特別な場合とみなすこともできる．関数 $f(z)/(z-a)$ は $z=a$ で1位の極をもち留数は $f(a)$ であり，(47)を用いると積分公式をうるからである．

留数の定理の他の応用が定理10の証明に表れ，解析関数の零点の個数をきめるのに役立った．位数 h の零点では $f(z)=(z-a)^h f_h(z), f_h(a)\neq 0$ とかけ，$f'(z)=h(z-a)^{h-1}f_h(z)+(z-a)^h f_h'(z)$ となる．ゆえに，$f'(z)/f(z)=h/(z-a)+f_h'(z)/f_h(z)$ となり，f'/f は1位の極をもち留数は h になることがわかる．(32)式では，項をそれだけ重複させてこの留数を説明した．

定理10を有理形関数の場合に一般化することができる．もし f が h 位の極をもてば h を $-h$ にかえて上と同じ計算をして，f'/f は留数 $-h$ をもつことがわかる．これで，次の定理が導かれる：

定理 18. $f(z)$ は Ω で有理形とし，零点を a_j，極を b_k とする．そのとき，Ω に関し0にホモローグで零点も極も通らない任意のサイクル γ に対し，

(48)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_j n(\gamma, a_j)-\sum_k n(\gamma, b_k)$$

が成り立つ．

零点と極はその位数だけ重複して同じ点を並べているし，(48)の和は有限和である．

定理18は**偏角の原理**と普通よばれている．その名前は，γ の像を Γ とすると(48)の左辺が $n(\Gamma, 0)$ に等しいことに関連している．もし Γ が原点を含まない円の中に入っておれば，$n(\Gamma, 0)=0$ である．この考察が，**ルーシェの定理**とよばれる次の系の基礎である：

系　γ は Ω で 0 にホモローグとし，γ 上にない各点 z で $n(\gamma, z)$ は 0 か 1 に等しいとする．$f(z), g(z)$ は Ω で解析的で，γ 上で不等式 $|f(z)-g(z)|<|f(z)|$ が成り立つと仮定する．そのとき，γ で囲まれた中に $f(z)$ と $g(z)$ は同じ個数の零点をもつ．

仮定から $f(z), g(z)$ は γ 上に零点をもたないことがわかる．さらに，γ の上で不等式

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}-1\right|<1$$

をみたす．γ の上での $F(z)=g(z)/f(z)$ の値は中心 1 半径 1 の開円板の中に含まれる．定理18を $F(z)$ に適用すると $n(\Gamma, 0)=0$ で結論をうる．

ルーシェの定理の典型的な応用は次のようなものであろう．関数 $f(z)$ の円 $|z|\leqq R$ 内の零点の個数をみつけたいとしよう．テイラーの定理を用いて

$$f(z)=P_{n-1}(z)+z^n f_n(z)$$

とかける．ここで，P_{n-1} は次数 $n-1$ 以下の多項式である．適当に n を選ぶと，$|z|=R$ のとき $R^n|f_n(z)|<|P_{n-1}(z)|$ を証明できるかもしれない．このときは $f(z)$ は $|z|\leqq R$ の中に $P_{n-1}(z)$ と同じ個数だけの零点をもち，この個数は方程式 $P_{n-1}(z)=0$ の近似解により求められる．

定理18は次のように一般化される．$g(z)$ を Ω で解析的とすると，$g(z)f'(z)/f(z)$ は $f(z)$ の h 位の零点 a では留数 $hg(a)$ をもち極では留数 $-hg(a)$ をもつ．これから，

$$(49)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_j n(\gamma, a_j)g(a_j)-\sum_k n(\gamma, b_k)\,g(b_k)$$

という公式をうる．

この結果は逆関数を調べるときに重要である．定理11と同じ記号を用いて，

方程式 $f(z)=w,\ |w-w_0|<\delta$ は円 $|z-z_0|<\varepsilon$ に n 個の根 $z_j(w)$ をもつ．(49)を $g(z)=z$ に適用すると，

$$\sum_{j=1}^{n} z_j(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\varepsilon}\frac{f'(z)}{f(z)-w}z\,dz \tag{50}$$

をうる．$n=1$ のときは，逆関数 $f^{-1}(w)$ が

$$f^{-1}(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\varepsilon}\frac{f'(z)}{f(z)-w}z\,dz$$

と具体的に表示できる．(49)を $g(z)=z^m$ に適用すると，(50)は

$$\sum_{j=1}^{n} z_j(w)^m=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\varepsilon}\frac{f'(z)}{f(z)-w}z^m\,dz$$

にかわる．この右辺は $|w-w_0|<\delta$ で w の解析関数を表す．ゆえに，根 $z_j(w)$ の累乗の和は w の1価解析関数である．一方，基本対称式が累乗の和の多項式で表されることはよく知られている．したがって，これらはまた解析関数になり，

$z_j(w)$ は $|w-w_0|<\delta$ で解析的な関数を係数とする多項式

$$z^n+a_1(w)z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(w)z+a_n(w)=0$$

の根であることがわかる．

問　題

1. 方程式 $z^7-2z^5+6z^3-z+1=0$ は，円 $|z|<1$ 内に何個の根をもつか．
   ヒント：$|z|=1$ のとき最大になる項を探し，ルーシェの定理を用いる．
2. 方程式 $z^4-6z+3=0$ は，円環 $1<|z|<2$ 内に何個の根をもつか．
3. 方程式 $z^4+8z^3+3z^2+8z+3=0$ は，右半平面に何個の根をもつか．
   ヒント：虚軸の像を画き，大きな半円に偏角の原理を適用する．

5.3. 定積分の計算　留数解析は定積分の計算に非常に有効な手段を提供する．不定積分が具体的に求められないときには特に重要であるし，普通の方法が使えるときにも，留数の利用はしばしば労力の節約になる．留数解析は実積分よりはむしろ複素積分のものであるという点は障害にはならない．明らかに，複素積分の計算は2つの定積分の計算に等しいからである．

しかし，重大な限界があって万能というには遠い．まず，被積分関数はある解析関数と密接に関係していなければならない．しかしこれは余りたいしたことはない．というのは，普通は初等関数の積分が必要になるだけで，それは複素領域に延ばしうるからである．もっと重大なのは，複素積分の方法は閉曲線に対してのみ適用でき，一方，実積分はいつも区間の上で行われることである．問題を閉曲線の上の積分に帰着させるために，特別の工夫をしなければならない．このための方法はいろいろあるが，いずれも特別な場合の特別な工夫である．典型的な例を通して技術を学びうるが，それに完全に精通してもいつもうまくいくとは限らない．

1．$\cos\theta, \sin\theta$ の有理関数を被積分関数とする

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta \tag{51}$$

の形の積分は，留数によって計算できる．もちろん，この積分は不定積分を具体的に求めることによってもできるが，その方法は普通は大変である．変数変換 $z=e^{i\theta}$ を行い，(51)を線積分

$$-i\int_{|z|=1} R\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\frac{dz}{z}$$

に変換してみるのは，しごく自然である．あとは，単位円内にある被積分関数の極での留数を計算すればよい．

例として，次の積分を計算してみよう：

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}, \quad a>1.$$

積分区間が $(0, 2\pi)$ ではないが，$\cos\theta$ は区間 $(0, \pi)$ と $(\pi, 2\pi)$ とで同じ値をとるから，0 から π までの積分は 0 から 2π までの積分の半分になる．これを計算にいれると，求める積分は

$$-i\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1}$$

に等しい．分母を $(z-\alpha)(z-\beta)$ と因数分解すると，

$$\alpha=-a+\sqrt{a^2-1}, \quad \beta=-a-\sqrt{a^2-1}$$

である．明らかに $|\alpha|<1, |\beta|>1$ であり，α での留数は $1/(\alpha-\beta)$ である．これで，積分の値は $\pi/\sqrt{a^2-1}$ になることがわかる．

2. $R(x)$ を有理関数とすると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$$

の形の積分が収束するのは，分母の次数が分子の次数より 2 次以上大きく，極が実軸上にないとき，そのときだけである．標準的な方法は，線分$(-\rho,\rho)$ と ρ から $-\rho$ にいたる上半平面内の半円周とからなる閉曲線の上で複素関数 $R(z)$ を積分するのである．ρ を十分大きくして上半平面内にある極をすべて囲むようにすると，この積分は上半平面にある留数の和の $2\pi i$ 倍に等しくなる．$\rho\to\infty$ とすると，簡単な評価で半円周上の積分は 0 に収束することがわかり，

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx=2\pi i\sum_{y>0}\operatorname{Res} R(z)$$

をうる．

3. 同じ方法が

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}dx \tag{52}$$

という形の積分に応用できる．この実部と虚部は，重要な積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos x dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x dx \tag{53}$$

である．$|e^{iz}|=e^{-y}$ は上半平面で有界であるから，有理関数 $R(z)$ が無限遠点で少くとも 2 位の零点をもつと仮定すると，半円周上の積分が 0 に収束することがまた示され，次の式をうる：

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}dx=2\pi i\sum_{y>0}\operatorname{Res} R(z)e^{iz}.$$

$R(z)$ が無限遠点で 1 位の零点をもつときにもこの式は成り立つが，これ

はそれほど自明ではない．この場合には半円周を用いるのは便利ではない．1つには半円周上の積分の評価が容易でなく，2つにはそれができたとしても，対称な区間での積分

$$\int_{-\rho}^{\rho} R(x)e^{ix}dx$$

の $\rho\to\infty$ の極限が求まるだけだからである．本当は，X_1, X_2 を独立に∞に近づけたときに

$$\int_{-X_1}^{X_2} R(x)e^{ix}dx$$

が極限をもつことを示さねばならぬ．前の例でこの問題が起きなかったのは，積分の収束はすでにわかっているとしたからである．

証明をするために，$Y>0$ として4点 $X_2, X_2+iY, -X_1+iY, -X_1$ を頂点とする長方形の周の上で積分する．X_1, X_2, Y は大きくするので，この長方形は上半平面の極をすべて含んでいるとしてよい．仮定より $|zR(z)|$ は有界である．ゆえに，右側の垂直な辺の上の積分は，定数を無視して

$$\int_0^Y e^{-y}\frac{dy}{|z|}<\frac{1}{X_2}\int_0^Y e^{-y}dy$$

より小さい．最後の積分を具体的に計算すると <1 がわかる．ゆえに，右側の垂直な辺の上の積分は $1/X_2$ の定数倍でおさえられ，同様にして左側の垂直な辺の上では $1/X_1$ の定数倍でおさえられる．上の水平な辺の上の積分は容易に $e^{-Y}(X_1+X_2)/Y$ の定数倍でおさえられることがわかる．X_1, X_2 を固定し $Y\to\infty$ とすると，A を定数として

$$\left|\int_{-X_1}^{X_2} R(x)e^{ix}dx-2\pi i\sum_{y>0}\mathrm{Res}\,R(z)e^{iz}\right|<A\left(\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}\right)$$

がわかる．この不等式から，$R(\infty)=0$ という条件だけの下で

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}dx=2\pi i\sum_{y>0}\mathrm{Res}\,R(z)e^{iz}$$

が証明される．

この議論で $R(z)$ は実軸上に極をもたないと暗黙のうちに仮定した．そう

しないと積分(52)が意味をもたなくなるからである．しかし，積分(53)の場合には，$R(z)$ の極が1位でちょうどそこが $\sin x$ または $\cos x$ の零点になっているときには，積分が存在する．例として $R(z)$ が $z=0$ で1位の極をもつとしよう．そのときは(53)のあとの方の積分は意味をもつから，計算法がほしい．

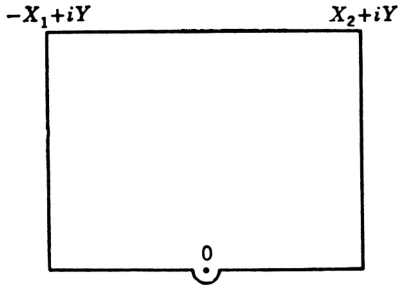


図4-12

前と同じ方法を用いるが，原点は下半平面にある半径 δ の小さな半円周でさけることにする(図4-12)．X_1, X_2, Y を十分大きくし δ を十分小さくすると，この閉曲線は上半平面にある極と原点にある極を囲み，そのほかの極は囲まない．0での留数を B とすると，$R(z)e^{iz}=B/z+R_0(z)$ とかけ，$R_0(z)$ は原点で解析的である．半円周上での最初の項の積分は πiB であり，第2項の積分は $\delta\to 0$ で0に収束する．これから次の結果がえられることは明らかである：

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\infty}R(x)e^{ix}dx=2\pi i\left[\sum_{y>0}\mathrm{Res}\,R(z)e^{iz}+\frac{1}{2}B\right].$$

左辺の極限は積分の**コーシーの主値** (principal value) とよばれる；積分自身は意味をもたなくてもそれは存在する．右辺には0での留数の半分が入っている；これはあたかも原点の極の半分が上半平面にあると教えているようである．

実軸上に極がいくつかある一般の場合には，

$$\mathrm{pr.v}\int_{-\infty}^{\infty}R(x)e^{ix}dx=2\pi i\sum_{y>0}\mathrm{Res}\,R(z)e^{iz}+\pi i\sum_{y=0}\mathrm{Res}\,R(z)e^{iz}$$

がわかる．記号は説明しなくてもよいだろう．実軸上にある極はみな1位の極であり，$R(\infty)=0$ となるというのが，本質的な仮定である．

もっとも簡単な例として，

$$\mathrm{pr.v}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx=\pi i$$

がある．実部と虚部にわけてみると，この式の実部は被積分関数が奇関数だから自明である．虚部では主値を考える必要はなく，被積分関数は偶関数だから

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

をうる．

$\cos^n x$ や $\sin^n x$ が因数としてかけられているときも，同じ方法で計算できることを注意しておく．これらの因数は $\cos mx$ と $\sin mx$ の 1 次結合で表すことができ，対応する積分は(52)を変数変換した式

$$\int_{-\infty}^\infty R(x) e^{imx} dx = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^\infty R\left(\frac{x}{m}\right) e^{ix} dx$$

に帰着されるからである．

4. α は定数で $0<\alpha<1$ として，

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x) dx$$

という形の積分が次の典型である．積分が収束するためには，$R(z)$ は少くとも 2 位の零点を∞でもち，原点は高々 1 位の極でなければならない．

$R(z)z^\alpha$ は 1 価でないということが新しい特徴である．しかし，この状況がまさに 0 から∞までの積分の計算を可能にするのである．

簡単にするために，$x=t^2$ とおいて積分を

$$2\int_0^\infty t^{2\alpha+1} R(t^2) dt$$

と変換して出発する．関数 $z^{2\alpha}$ は偏角が $-\pi\alpha$ と $3\pi\alpha$ の間にあるように枝がとれる；こうすると，負の虚軸を除いた残りの平面で定義され解析的である．負の虚軸を除いた所では，$z^{2\alpha+1}R(z^2)$ に留数の定理を適用することができる．閉曲線としては，正の実軸上の線分と負の実軸上の線分と，上半平面の大きな半円周と小さな半円周とからなるものをとる(図4-13)．われわれの仮定から 2 つの半円周上の積分は 0 に収束することが容易にわかる．ゆえに，留数定理により積分

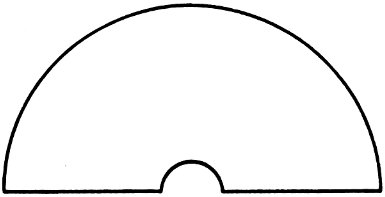


図4-13

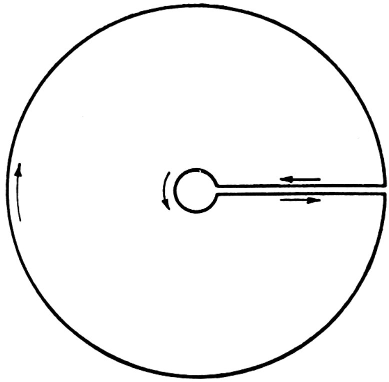


図4-14

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^{2\alpha+1}R(z^2)dz=\int_0^{\infty}(z^{2\alpha+1}+(-z)^{2\alpha+1})R(z^2)dz$$

の値が求まる．しかし，$(-z)^{2\alpha}=e^{2\pi i\alpha}z^{2\alpha}$ で，この積分は

$$(1-e^{2\pi i\alpha})\int_0^{\infty} z^{2\alpha+1}R(z^2)dz$$

に等しい．前の係数は $\neq 0$ なので，これで目的の積分の値がきまる．

計算としては上半平面にある $z^{2\alpha+1}R(z^2)$ の留数を求めることになる．これは全平面での $z^{\alpha}R(z)$ の留数に等しい．実際的には，最初の変数変換をしないで $z^{\alpha}R(z)$ を図4-14に示した閉曲線の上で積分する方がよいかもしれない．このときは z^{α} の枝を偏角が0と $2\pi\alpha$ との間にあるようにえらぶ．これは留数定理の仮定にあわないので，この方法は少し正当化する必要がある．この正当化は明らかであろう．

5. 最後の例として，特殊な積分

$$\int_0^{\pi}\log\sin\theta\, d\theta$$

を計算する．関数 $1-e^{2iz}=-2ie^{iz}\sin z$ を考える．$1-e^{2iz}=1-e^{-2y}(\cos 2x+i\sin 2x)$ とかいてみると，この関数が負の実数になるのは $x=n\pi, y\leqq 0$ のときだけであることがわかる．ゆえに，これらの半直線を除いてえられる領域で，$\log(1-e^{2iz})$ の主値は1価解析的になる．$0, \pi, \pi+iY, iY$ を頂点とする

長方形にコーシーの定理を適用する；ただし，点 0 と π はさけねばならず，半径 δ の小さい四分の一の円でこれを行う．

周期性から垂直な辺の上の積分は互いにうち消しあう．上の水平な辺の上の積分は $Y\to\infty$ のときに 0 に収束する．最後に，四分の一の円周の上の積分も $\delta\to 0$ のときに 0 に近づくことがいえる．実際，対数の虚部は有界だから実部だけをみればよい．$z\to 0$ のとき $|1-e^{2iz}|/|z|\to 2$ となるから，$\log|1-e^{2iz}|$ は $\log\delta$ と同じ速さで無限大となり，$\delta\log\delta\to 0$ より，原点の近くの四分の一の円周上の積分は 0 に近づく．

頂点 π の近くでも同じ証明ができて，結局

$$\int_0^\pi \log(-2ie^{ix}\sin x)dx=0$$

をうる．$\log e^{ix}=ix$ とすると虚部は 0 と π の間にある．したがって，虚部が $-\pi$ と π の間にあるような主値をとるためには，$\log(-i)=-\pi i/2$ にとらねばならぬ．これで上の方程式は

$$\pi\log 2-\left(\frac{\pi^2}{2}\right)i+\int_0^\pi \log(\sin x)dx+\left(\frac{\pi^2}{2}\right)i=0$$

とかけ，次の式をうる：

$$\int_0^\pi \log(\sin x)dx=-\pi\log 2.$$

問　題

1. 次の関数の極と留数を求めよ：

(a) $\dfrac{1}{z^2+5z+6}$，　(b) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$，　(c) $\dfrac{1}{\sin z}$，　(d) $\cot z$，

(e) $\dfrac{1}{\sin^2 z}$，　(f) $\dfrac{1}{z^m(1-z)^n}$　(m, n は正整数)

2. 5.3節例 3 において，積分を直角 2 等辺三角形上にとることができる．これを示せ．(この問題は，学生に教えられた)．

3. 留数を用いて次の積分を計算せよ：

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{a+\sin^2 x}$，$|a|>1$，　(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}dx$，

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$，　(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}dx$，　a は実数，

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx$,　a は実数，　　(f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx$,　a は実数，

(g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{1+x^2}dx$,　　(h) $\displaystyle\int_0^\infty (1+x^2)^{-1}\log x\,dx$

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \log(1+x^2)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}$,　$(0<\alpha<2)$.

4. 次の積分を計算せよ：

$$\int_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2},\qquad |a|\neq\rho.$$

ヒント： $z\bar{z}=\rho^2$ をいて，有理関数の線積分に転換せよ．

*5. 複素積分が面積積分の計算に用いられることもある．例として，$f(z)$ が $|z|<1$ で解析的で有界とすると，$|\zeta|<1$ ならば

$$f(\zeta)=\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<1}\frac{f(z)}{(1-\bar{z}\zeta)^2}dxdy$$

となることを示せ．

注．これは，ベルグマンの核公式とよばれる．証明するには，面積積分を極座標になおし，内側の積分を線積分に表し留数によって計算せよ．

6. 調和関数

解析関数の実部と虚部は共役調和関数である．したがって，解析関数の定理はすべて共役調和関数の対にたいする定理である．しかし，調和関数は本来それ自身で重要なものであり，複素数の方法を用いて取り扱いがいつも簡単になるとは限らない．共役調和関数が1価でないときはとくにそうである．

コーシーの定理と密接に関連する調和関数の性質をこの節に集める．調和関数のもっと扱いにくい性質は後章にまわす．

6.1. 定義と基本的性質　領域 Ω で定義され1価な実数値関数 $u(z)$ ($u(x,y)$ ともかく) が Ω で**調和**である，または**ポテンシャル関数**であるというのは，2階までの偏導関数が存在しそれが連続で，ラプラスの方程式

$$(54)\qquad \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

をみたすことである．なめらかさの条件についてはあとで弱めるが，これは相対的にそれほど重要ではない．

2つの調和関数の和はまた調和であり，調和関数の定数倍はまた調和である；これはラプラス方程式の線形性による．もっとも簡単な調和関数は1次関数 $ax+by$ である．方程式(54)を極座標 (r,θ) でかくと，

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0^{\dagger}$$

となる． これから $\log r$ は調和関数になり， r だけの関数で調和なものは $a\log r+b$ という形にかぎることがわかる．偏角 θ は，それが1価にきまりさえすれば調和である．

u が Ω で調和ならば，

$$f(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y} \tag{55}$$

は Ω で解析関数になる．何故なら，$U=\partial u/\partial x$, $V=-\partial u/\partial y$ とおくと，

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

となるからである．これが調和関数から解析関数へうつるもっとも自然な方法であることを覚えておいてほしい．

(55)から微分について次の式をうる：

$$f\,dz=\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+i\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right) \tag{56}$$

この式で実部は関数 u の微分になり

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

である．もし u が共役調和関数 v をもつとすると，虚部は

---

†) この式は，$r=0$ に対しては使用できない．

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

とかける．しかし，一般には1価な共役関数が存在するとは限らないので，この状況下では dv という記号を用いない方がよい．代りに

$$^*du = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

とかくことにし，$^*du$ を du の**共役微分**という．(56)から次の式をうる:

$$f\,dz = du + i^*du. \tag{57}$$

コーシーの定理により，Ω で0にホモローグな任意のサイクルにそって $f\,dz$ を積分すると0になる．一方，完全微分 du の積分は任意のサイクル上で0になる．(57)から，Ω で0にホモローグな任意のサイクル γ に対し

$$\int_\gamma {}^*du = \int_\gamma -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = 0 \tag{58}$$

が成り立つ．

(58)の積分は重要な解釈ができ，ふれないわけにはいかない．γ を方程式 $z=z(t)$ の正則曲線とすると，接線の方向は角 $\alpha = \arg z'(t)$ によりきまり，$dx = |dz|\cos\alpha$, $dy = |dz|\sin\alpha$ とかける．接線の右を指す法線は方向 $\beta = \alpha - \pi/2$ をもち，$\cos\alpha = -\sin\beta$, $\sin\alpha = \cos\beta$ である．

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\beta$$

とおくと，この式は u の一つの方向微分で曲線 γ に関する右側**法線微分**である．$^*du = (\partial u/\partial n)|dz|$ となり，(58)は次の形でかける:

$$\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n}|dz| = 0. \tag{59}$$

これは古典的な記号である．その主な有用性は，実際に $\partial u/\partial n$ は γ に垂直な方向への u の変化の割合を表している点である．例えば γ を円 $|z|=r$ として正の向きにとると，$\partial u/\partial n$ は偏微分 $\partial u/\partial r$ のことである．不便なのは，(59)は普通の線積分でなく弧長に関する積分になっていることである．

この理由から古典的記号はホモロジー理論との関連では自然でなく，記号 $^*du$ の方を用いたい．

単連結領域では $^*du$ の積分はすべてのサイクルの上で0になり，u は1価の共役関数 v をもち，それは定数の差を無視すれば一意的である．多重連結領域では，ホモロジーの基底のサイクル γ_i に関して共役関数は周期

$$\int_{\gamma_i} {}^*du = \int_{\gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n}|dz|$$

をもつ．

(58)の重要な一般化として調和関数の対を扱うものがある．u_1, u_2 を Ω で調和とすると，Ω で0にホモローグな任意のサイクルに対し

$$\int_\gamma u_1{}^*du_2 - u_2{}^*du_1 = 0 \tag{60}$$

が成り立つことを示したい．4.6節の定理16により，R を Ω に含まれる長方形として $\gamma = \partial R$ に対し(60)を証明すれば十分である．R では u_1, u_2 は1価な共役関数 v_1, v_2 をもち，

$$u_1{}^*du_2 - u_2{}^*du_1 = u_1dv_2 - u_2dv_1 = u_1dv_2 + v_1du_2 - d(u_2v_1)$$

とかくことができる．ここで，$d(u_2v_1)$ は完全微分であり，$u_1dv_2 + v_1du_2$ は

$$(u_1 + iv_1)(du_2 + idv_2)$$

の虚部である．この最後の微分は R での解析関数 $F_1(z), f_2(z)$ により F_1f_2dz とかける．コーシーの定理により ∂R 上の F_1f_2dz の積分は0になり，その虚部の積分もそうである．(60)が $\gamma = \partial R$ に対し成り立つことがこれでわかり，次の定理が証明できた：

定理 19. u_1, u_2 を領域 Ω で調和とすると，Ω で0にホモローグな任意のサイクル γ に対し次の式が成り立つ：

$$\int_\gamma u_1{}^*du_2 - u_2{}^*du_1 = 0. \tag{60}$$

$u_1 = 1, u_2 = u$ とすると，この式は (58) にもどる．古典的な書き方では，

(60)は次のようになるだろう:

$$\int_{\gamma}\left(u_1\frac{\partial u_2}{\partial n}-u_2\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)|dz|=0.$$

6.2. 平均値の性質　$u_1=\log r$, u_2 は $|z|<\rho$ での調和関数 u として定理19を適用する．Ω としては点を抜いた円 $0<|z|<\rho$ をとり，C_i を正の向きの円周 $|z|=r_i<\rho$ としてサイクル γ は C_1-C_2 とする．円周 $|z|=r$ の上では $*du=r(\partial u/\partial r)d\theta$ となり，(60)は

$$\log r_1\int_{C_1}r_1\frac{\partial u}{\partial r}d\theta-\int_{C_1}ud\theta=\log r_2\int_{C_2}r_2\frac{\partial u}{\partial r}d\theta-\int_{C_2}ud\theta$$

となる．いいかえると，

$$\int_{|z|=r}ud\theta-\log r\int_{|z|=r}r\frac{\partial u}{\partial r}d\theta$$

は r によらず一定となる．これは u が円環領域で調和としても正しい．同様にして(58)より u が円環領域で調和な場合は

$$\int_{|z|=r}r\frac{\partial u}{\partial r}d\theta$$

は一定となり，もし u が円板全体で調和なら0になる．この2つの結果を組合せて次の定理をうる:

定理 20. 調和関数の同心円周 $|z|=r$ 上の算術平均は $\log r$ の1次関数である．すなわち，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}ud\theta=\alpha\log r+\beta \tag{61}$$

である．u が円板全部で調和なら $\alpha=0$ でこの算術平均は定数である．

後者の場合，連続性より $\beta=u(0)$ となり，原点を平行移動しておくと

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})d\theta \tag{62}$$

がわかる．

(62)は3.4節(34)にある解析関数に対する同様の結果からも，導きうることは明らかである．これからすぐに，調和関数に対する最大値の原理をうる．

定理 21. 定数でない調和関数は定義域の内点で最大値も最小値もとらない．したがって，有界閉集合 E 上での最大値，最小値は E の境界上でとる．

証明は解析関数の最大値の原理と同様なのでくり返さない．最小値については u が調和なら $-u$ もそうなので $-u$ の最大値を考えればよい．解析関数のときには，これは $f(z)\neq 0$ ならば，解析的である $1/f(z)$ を考え最大値の原理を適用したのであった．解析関数の最大値の原理は調和関数の最大値の原理からも導かれる．$f(z)\neq 0$ ならば調和である $\log|f(z)|$ に後者を適用すればよい．

問　題

1. u が $0<|z|<\rho$ で調和で有界ならば，原点は除去可能特異点であることを示せ．その意味は，$u(0)$ を適当に定義すれば $|z|<\rho$ で u が調和になることである．
2. $f(z)$ は $r_1\leqq|z|\leqq r_2$ で連続，$r_1<|z|<r_2$ で解析的とし，$|z|=r$ 上で $|f(z)|$ の最大値を $M(r)$ とおく．このとき，$\alpha=\log(r_2/r)\colon\log(r_2/r_1)$ として
$$M(r)\leqq M(r_1)^{\alpha}M(r_2)^{1-\alpha}$$
が成り立つことを示せ(アダマールの三円定理)．等号が成り立つのはどんなときか．ヒント：$\log|f(z)|$ と $\log|z|$ の1次結合に最大値の原理を適用せよ．

6.3. ポアソンの公式

最大値の原理から次の重要な結果が導かれる：$u(z)$ が有界閉集合 E 上で連続，E の内部で調和とすると，E の境界上の値で u は一意的に定まってしまう．実際，u_1. u_2 を同じ境界値をもつ調和関数とすると，u_1-u_2 は調和で境界上では0になる．最大値・最小値の原理を用いると，u_1-u_2 は E で恒等的に0になる．

境界値が与えられているときに u を求める問題がここから生ずる．この節では一番簡単な場合，つまり閉円板に対して問題を解こう．

(62)式により中心での u の値がきまる．しかし，任意の点を中心に写す

1次変換が存在するから，これが必要なすべてである．はっきりかくために，$u(z)$ は閉円板 $|z|\leqq R$ で調和と仮定する．1次変換

$$z=S(\zeta)=\frac{R(R\zeta+a)}{R+\bar{a}\zeta}$$

は $|\zeta|\leqq 1$ を $|z|\leqq R$ の上に写し $\zeta=0$ は $z=a$ に対応する．$u(S(\zeta))$ は $|\zeta|\leqq 1$ で調和であり，(62)より

$$u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}u(S(\zeta))d\arg\zeta$$

をうる．$\zeta=R(z-a)/(R^2-\bar{a}z)$ より

$$d\arg\zeta=-i\frac{d\zeta}{\zeta}=-i\left(\frac{1}{z-a}+\frac{\bar{a}}{R^2-\bar{a}z}\right)dz=\left(\frac{z}{z-a}+\frac{\bar{a}z}{R^2-\bar{a}z}\right)d\theta$$

となる．$R^2=z\bar{z}$ を代入してこの式の $d\theta$ の係数をかきなおすと

$$\frac{z}{z-a}+\frac{\bar{a}}{\bar{z}-\bar{a}}=\frac{R^2-|a|^2}{|z-a|^2}$$

となり，これは

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z+a}{z-a}+\frac{\bar{z}+\bar{a}}{\bar{z}-\bar{a}}\right)=\mathrm{Re}\frac{z+a}{z-a}$$

に等しい．これで，**ポアソンの公式**の2つの形が次のようにえられた：

$$(63)\qquad u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\frac{R^2-|a|^2}{|z-a|^2}u(z)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\mathrm{Re}\frac{z+a}{z-a}u(z)d\theta.$$

極座標でかきなおすと次のようになる：

$$u(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}u(Re^{i\theta})d\theta.$$

これまで $u(z)$ は閉円板で調和と仮定してきた．しかし，$u(z)$ は開円板で調和で閉円板で連続という弱い条件の下でも結果は正しい．実際，$0<r<1$ とすると $u(rz)$ は閉円板で調和であり

$$u(ra)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\frac{R^2-|a|^2}{|z-a|^2}u(rz)d\theta$$

が成り立つ．なすべきことは r を1に近づけることである．$u(z)$ は $|z|\leqq R$ で一様連続だから，$|z|=R$ のとき一様に $u(rz)\to u(z)$ となることがいえ，(63)が正しいことを結論できる．

定理として結果をまとめておこう：

定理 22. $u(z)$ は $|z|<R$ で調和とし $|z|\leqq R$ で連続と仮定する．このときすべての $|a|<R$ に対し，

$$u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\frac{R^2-|a|^2}{|z-a|^2}u(z)d\theta \tag{64}$$

が成り立つ．

この定理から直ちに，u の共役関数の具体的な表示式をうる．公式(63)から

$$u(z)=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}u(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\right] \tag{65}$$

がえられる．[　]の中の式は $|z|<R$ で z の解析関数である．$u(z)$ は

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}u(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+iC \tag{66}$$

の実部であることがわかる．ここで，C は実数の任意定数である．この公式はシュヴァルツの公式とよばれる．

(64)の特別な場合として $u=1$ とすると，任意の $|a|<R$ に対し

$$\int_{|z|=R}\frac{R^2-|a|^2}{|z-a|^2}d\theta=2\pi \tag{67}$$

が成り立つ．

6.4. シュヴァルツの定理

定理22は与えられた調和関数を円周上の値によって表現するのに役立つ．しかし，(64)式の右辺は，u が適当な条件(例えば区分的に連続)をみたすなら，u が $|z|=R$ 上で定義されておれば意味をもつ．その積分はまた(65)のように解析関数の実部として書くことができ，したがって調和関数である．問題は，$u(z)$ がその調和関数の $|z|=R$

の上での境界値になるかどうかである．

記号をはっきりさせた方が良い．$R=1$ にして，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ で区分的に連続な関数 $U(\theta)$ に対し，

$$P_U(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}U(\theta)d\theta$$

とおき，U の**ポアソン積分**という．$P_U(z)$ は z の関数であるばかりでなく，関数 U の関数でもある；このようなのを**汎関数**という．この汎関数は**線形**である．つまり，

$$P_{U+V}=P_U+P_V$$

が成り立ち，定数 c に対し

$$P_{cU}=cP_U$$

も成り立つ．さらに，$U\geqq 0$ なら $P_U(z)\geqq 0$ である；これらが成り立つから，P_U は**正の**線形汎関数であるという．

(67)から $P_c=c$ がいえる．これと汎関数が線形で正ということから，$m\leqq U\leqq M$ なら $m\leqq P_U\leqq M$ となることがわかる．

境界値問題は次の基本的な定理により解決されるが，これは H.A. シュヴァルツがはじめて証明した．

定理 23． $P_U(z)$ は $|z|<1$ で調和であり，U が θ_0 で連続ならば

(68)
$$\lim_{z\to\exp(i\theta_0)} P_U(z)=U(\theta_0)$$

が成り立つ．

P_U が調和になることはすでに注意した．境界でのふるまいを調べるために，単位円周を C_1, C_2 と2つの円弧にわけ，C_1 の上では U で C_2 の上では0の関数を U_1 とかき，C_2 の上では U で C_1 の上では0のを U_2 とかく．明らかに，$P_U=P_{U_1}+P_{U_2}$ となる．

P_{U_1} は C_1 の上の線積分とみることができるから，前と同じ理由でそれは両端もこめて C_1 を除くといたるところ調和になる．$z\neq e^{i\theta}$ なら $|z|=1$ のとき

$$\mathrm{Re}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}=\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$$

は0になる．ゆえに，P_{U_1} は両端を除いた C_2 の上では0になり，連続だから $e^{i\theta}\in C_2$ のとき $\lim_{z\to e^{i\theta}} P_{U_1}(z)=0$ となる．

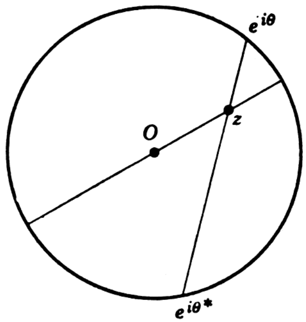


図4-15

(68) を証明するのに $U(\theta_0)=0$ と仮定してよい．これは U を $U-U(\theta_0)$ におきかえるだけである．与えられた $\varepsilon>0$ に対し，C_1, C_2 を $e^{i\theta_0}$ は C_2 の内点で $e^{i\theta}\in C_2$ なら $|U(\theta)|<\varepsilon/2$ となるようにとる．こうすると，すべての θ に対し $|U_2(\theta)|<\varepsilon/2$ となり，ゆえに $|z|<1$ のとき $|P_{U_2}(z)|<\varepsilon/2$ となる．一方，$e^{i\theta_0}$ で U_1 は連続で0だから，δ が存在し $|z-e^{i\theta_0}|<\delta$ ならば $|P_{U_1}(z)|<\varepsilon/2$ となるようにできる．これから，$|z|<1$ で $|z-e^{i\theta_0}|<\delta$ ならば $|P_U(z)|\leqq|P_{U_1}|+|P_{U_2}|<\varepsilon$ がわかり，これが証明すべきことであった．

これもシュヴァルツにおうが，ポアソンの公式の面白い幾何学的説明がある．単位円の内部に点 z を固定し，各 $e^{i\theta}$ に対し $e^{i\theta}, z, e^{i\theta^*}$ が一直線上に並ぶように $e^{i\theta^*}$ をきめる(図4-15)．幾何学的には明らかであるが簡単な計算により

$$1-|z|^2=|e^{i\theta}-z|\,|e^{i\theta^*}-z| \tag{69}$$

をうる．比 $(e^{i\theta}-z)/(e^{i\theta^*}-z)$ は負だから

$$1-|z|^2=-(e^{i\theta}-z)(e^{-i\theta^*}-\bar{z})$$

とならねばならぬ．θ^* を θ の関数とみて微分する．z は定数とみているから，

$$\frac{e^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}-z}=\frac{e^{-i\theta^*}d\theta^*}{e^{-i\theta^*}-\bar{z}}$$

がえられる．絶対値をとると

$$\frac{d\theta^*}{d\theta}=\left|\frac{e^{i\theta^*}-z}{e^{i\theta}-z}\right| \tag{70}$$

となる．(69)と(70)から

$$\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}=\frac{d\theta^*}{d\theta}$$

となり，ゆえに

$$P_U(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\theta)d\theta^*=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\theta^*)d\theta.$$

が成り立つ．いいかえると，$P_U(z)$ を求めるには $U(\theta)$ の値を z に関し反対側の点での値におきかえて円周上で平均をとればよい．

問　題

1. $U(\xi)$ は実軸上で区分的に連続で有界とする．

$$P_U(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}U(\xi)d\xi$$

は上半平面で調和で，U の連続点では境界値が $U(\xi)$ であることを示せ（上半平面でのポアソン積分）．

2. 上半平面で調和で有界，実軸までこめて連続な関数は，ポアソン積分（問1）で表されることを示せ．

注．無限遠点の存在が困難を生じ，$u-P_u$ に最大値最小値の原理を直接適用するわけにはいかない．$\varepsilon>0$ として，$u-P_u-\varepsilon y$ に最大値の原理を用い，$\varepsilon\to 0$ とするのがよいだろう．$y\to 0$ でこの関数は0に収束し，$y\to\infty$ で $-\infty$ にいくのでほとんどよいのだが，$|x|\to\infty$ のときに統制が欠ける．$u-P_u-\varepsilon\,\mathrm{Im}(\sqrt{iz})$ に適用すればうまくいくことを示せ．

3. 問1において，U が0で不連続として，例えば $U(+0)=0, U(-0)=1$ とする．$z\to 0$ のとき $P_U(z)-(\arg z)/\pi\to 0$ を示せ．円周の場合に任意の点で関数の跳躍量も任意として，その場合に一般化せよ．

4. 単位円周を C_1, C_2 と2つの円弧にわけ，C_1 では $U=1, C_2$ では $U=0$ とする．$P_U(z)$ を求め，$2\pi P_U(z)$ は，C_1 の各端点と z を結ぶ線分により切りとられる C_1 の向側にある円弧の弧長に等しいことを示せ．

5. 平均値の公式(62)が $u=\log|1+z|, z_0=0, r=1$ に対しても正しいことを示し，これを用いて次の積分を求めよ：

$$\int_0^{\pi}\log\sin\theta d\theta.$$

6. $f(z)$ は全平面で解析的で，$z\to\infty$ のときに $z^{-1}\mathrm{Re}\,f(z)\to 0$ とすると，f は定数になることを示せ．ヒント：(66)を用いる．

7. $f(z)$ が ∞ の近傍で解析的で，$z\to\infty$ のときに $z^{-1}\mathrm{Re}\,f(z)\to 0$ とすると，$\lim_{z\to\infty}f(z)$ が存在することを示せ．（すなわち，∞ は除去可能孤立特異点である）．ヒント：まず，コーシーの積分公式を用いて，$f=f_1+f_2$, $z\to\infty$ のときに $f_1(z)\to 0, f_2(z)$ は全平面で解析的，と表す．

***8.** $u(z)$ は $0<|z|<\rho$ で調和で $\lim_{z\to 0}zu(z)=0$ とする．このとき，定数 α と

$|z|<\rho$ での調和関数 u_0 により，$u(z)=\alpha\log|z|+u_0(z)$ という形でかける．
ヒント：α は(61)のようにとれ．すると $u_0(z)$ がある解析関数 $f_0(z)$ の実部になり，前問を用いて0にある特異点が除去可能になることを示す．

6.5. 鏡像の原理

1次変換と関連して，対称の原理または鏡像の原理の基本的な見方はすでに議論した(3章3.3節)．H.A. シュヴァルツによりはじめて定式化されたもっと一般的な変形がいろいろある．

鏡像の原理は，$u(z)$ が調和なら $u(\bar{z})$ も調和である，$f(z)$ が解析的なら $\overline{f(\bar{z})}$ も解析的であるという考察を基礎にしている．もっときちんというと，領域 Ω で $u(z)$ が調和で $f(z)$ が解析的ならば，実軸に関し Ω と対称な領域 Ω^* において z の関数として $u(\bar{z})$ は調和で $\overline{f(\bar{z})}$ は解析的である．このことの証明は自明な確認をちょっとすればよい．

対称的な領域 $\Omega=\Omega^*$ の場合を考えよう．Ω は連結だから Ω と実軸とは少くとも1つは開区間を共有する．$f(z)$ は Ω で解析的で実軸上の少くとも1つの開区間の上で実数値をとると仮定する．$f(z)-\overline{f(\bar{z})}$ は解析的でこの区間の上で0になるから恒等的に0となり，Ω で $f(z)=\overline{f(\bar{z})}$ がわかる．$f=u+iv$ とかくと，$u(z)=u(\bar{z}), v(z)=-v(\bar{z})$ である．

これは重要であるが，かなり弱い結果である．というのは，$f(z)$ が Ω 全体で解析的ということがすでにわかっていると仮定したからである．Ω と上半平面の共通部分を Ω^+ とかき，Ω と実軸の共通部分を σ とかく．$f(z)$ は $\Omega^+\cup\sigma$ で定義され連続で，Ω^+ では解析的で σ では実数値をとると仮定しよう．この条件の下で，$f(z)$ は Ω 全体で解析的な関数を Ω^+ に制限したものになっており対称性の条件 $f(z)=\overline{f(\bar{z})}$ をみたすことを示したい．いいかえると，定理の一部分として $f(z)$ が Ω に解析接続できることを示す．

この定式化でさえも条件が強すぎる．実際，重要なことは虚部 $v(z)$ が σ で0になることで，実部については何も仮定しなくてよい．したがって，鏡像の原理の決定的な形では調和関数を強調するべきである．

定理 24. 実軸に関し対称な領域 Ω の上半平面にある部分を Ω^+ とし，Ω の実軸上の部分を σ とする．$v(z)$ は $\Omega^+\cup\sigma$ で連続で Ω^+ では調和，σ では

0と仮定する． このとき，$v(z)$ は Ω での調和関数に拡張され，対称性の条件 $v(\bar{z})=-v(z)$ をみたす．同じ条件の下で，v が Ω^+ で解析関数 $f(z)$ の虚部であれば，$f(z)$ は Ω に解析接続され $f(z)=\overline{f(\bar{z})}$ をみたす．

証明のために，Ω^+ では $v(z)$ に等しく σ では0で，Ω^+ に対称な反対側では $-v(\bar{z})$ に等しいとして関数 $V(z)$ を作る．V が σ の上で調和なことを示せばよい．点 $x_0\in\sigma$ に対し x_0 を中心とし Ω に含まれる円を考え，この円周上で V を境界値とするポアソン積分を作り P_V とかく．$V-P_V$ はこの円の上半分では調和である．定理23により半円周上では0となり，実軸上の直径でも0になる． 何故なら V は定義から0へ行くし P_V は対称性から0がわかる．最大値最小値の原理から，上半分の円で $V=P_V$ がわかり，同様の証明が下半分ででもできる．V は円の中で調和となり x_0 でもそうである．

定理の残りの証明のために，また σ 上に中心をもつ円を考える．v はこの円の全体にすでに拡張できており，v はこの円で共役調和関数 $-u_0$ をもつが，上半平面では $u_0=\mathrm{Re}\,f(z)$ となるように定数をうまくとっておく．

$$U_0(z)=u_0(z)-u_0(\bar{z})$$

を考える．実軸上の直径では $\partial U_0/\partial x=0$ は明らかで，また

$$\frac{\partial U_0}{\partial y}=2\frac{\partial u_0}{\partial y}=-2\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

となる．解析関数 $\partial U_0/\partial x-i\partial U_0/\partial y$ は実軸上0になりゆえに恒等的に0になることがわかる．ゆえに，U_0 は定数となり，明らかにこの定数は0である．これで $u_0(z)=u_0(\bar{z})$ がいえた．

任意の円でこの作り方はくり返され， 円の重なり合った所で u_0 が一致することは明らかである．Ω 全体で定義ができ証明は終わる．

定理は明らかに一般化できる．領域 Ω は直線に関してではなく円周 C に関し対称としてよく，z が C に収束するときに $f(z)$ がほかの円周 C' に収束すると仮定してよい．この条件の下で $f(z)$ は解析接続され， C に関し対称な点を C' に関し対称な点に写す．

問　題

1. $f(z)$ は全平面で解析関数とし，実軸上では実数値をとり虚軸上では純虚数値をとるとする．このとき $f(z)$ は奇関数であることを示せ．

2. 対称的な領域 Ω での解析関数は $f=f_1+if_2$ とかけることを示せ．ただし，f_1, f_2 は Ω で解析的で実軸上では実数値をとる関数である．

3. $f(z)$ が $|z|\leqq 1$ で解析的で $|z|=1$ ならば $|f|=1$ とすると，$f(z)$ は有理関数になることを示せ．

4. (66)を用いて $f'(z)$ を $u(z)$ で表す式を導け．

5. $u(z)$ が $y>0$ で調和で $0\leqq u(z)\leqq Ky$ をみたすとすると，$0\leqq k\leqq K$ があり $u=ky$ となることを証明せよ．（実軸に関し鏡像し，全平面での解析関数 $f=u+iv$ を作り，問 4 を用いて $f'(z)$ が有界なことを示せ．）

第5章　級数展開と無限積展開

解析関数論では非常に一般的な定理が当然の位置をしめる．しかし，具体的な解析的表示を扱えるようになりたいという希望から，すべての理論は始まったことを心に留めておかねばならぬ．そのような表示は，無限級数か無限積かまたはほかの極限になっている．この章では，一方では極限を支配する法則を扱い，また一方では，初等超越関数やそのほかの特殊関数の具体的な式表示を扱う．

1．整級数展開

第2章で整級数を考えたが，その主な目的は指数関数と三角関数を定義することであった．積分を用いなければ，解析関数が整級数展開をもつことの証明ができなかった．この問題は本質的にコーシーの定理の応用として解決される．

最初の節では解析関数列の一般的な性質を取り扱う．

1.1．ワイエルシュトラスの定理　解析関数列の一様収束極限がまた解析関数になるというのが，解析関数の収束に関する中心的な定理である．正確な仮定は注意深く述べて，制限になりすぎないようにしたい．

関数列 $\{f_n(z)\}$ を考え，各 $f_n(z)$ は領域 Ω_n で定義され解析的とする．極限関数 $f(z)$ もある領域 Ω で考えねばならず，$f(z)$ が Ω で定義される以上，Ω の各点に対し n_0 がきまり n_0 より大きいすべての n に対しその点は Ω_n に入らねばならない．一般に n_0 は Ω のすべての点に対し同じとはいかず，このために収束が Ω で一様であるという意味がわからないだろう．実際，もっとも典型的な例は領域 Ω_n が増加列 $\Omega_1\subset\Omega_2\subset\cdots\subset\Omega_n\subset\cdots$ となっており Ω が Ω_n

の合併になっているときである．このときはどの $f_n(z)$ も Ω 全体では定義されていない；それにもかかわらず，極限 $f(z)$ は Ω の各点で存在してもよいが，その収束は一様ではありえない．

簡単な例として，$f_n(z)=z/(2z^n+1)$, $\Omega_n=\{z;\ |z|<2^{-1/n}\}$ をとろう．$|z|<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} f_n(z)=z$ は明らかであり，$|z|<1$ を Ω にとる．収束の一様性を調べるのには，差

$$f_n(z)-z=-2z^{n+1}/(2z^n+1)$$

を作る．z を任意に与えると，$n>\log(4/\varepsilon)/\log(1/|z|)$ とすれば $|z^n|<\varepsilon/4$ とできる．$\varepsilon<1$ ならばそのとき $2|z|^{n+1}<\varepsilon/2$ で $|1+2z^n|>1/2$ となり，$|f_n(z)-z|<\varepsilon$ となる．これから，閉円板 $|z|\leqq r<1$ で，またはその任意の部分集合で収束が一様であることがわかる．

別のいい方をすると，この例で $\{f_n(z)\}$ は Ω の任意のコンパクト集合の上で一様に極限関数 $f(z)$ に収束することがわかる．実際，コンパクト集合の上では $|z|$ が最大値 $r<1$ をもち，そのコンパクト集合は閉円板 $|z|\leqq r$ に含まれるからである．これは典型的な情勢である．Ω の任意のコンパクト部分集合上で一様収束を示せることがしばしばある；一方，これが今から証明しようとする定理の自然な条件である．

定理 1　$f_n(z)$ は領域 Ω_n で解析的で，関数列 $\{f_n(z)\}$ は領域 Ω で極限関数 $f(z)$ に収束し，収束は Ω の各コンパクト部分集合の上では一様であるとする．このとき，$f(z)$ は Ω で解析的である．さらに，$f_n'(z)$ は Ω の各コンパクト部分集合の上で一様に $f'(z)$ 収束する．

$f(z)$ の解析性を示すにはモレラの定理（4章2.3節）を用いるのがもっとも容易である．$|z-a|\leqq r$ を Ω に含まれる閉円板としよう；仮定よりある n_0 があり，n_0 より大きいすべての n に対しこの円は Ω_n に含まれる†．γ を $|z-$

†) $\{\Omega_n\}$ は $|z-a|\leqq r$ の開被覆をなす．閉円板はコンパクトだから有限部分被覆をもつ．これは一つの Ω_{n_0} に含まれることを意味している．［以下訳注．］定理1には Ω_n の条件が明記されていないが，領域の増加列で合併集合が Ω としているらしい．増加列でなくても，Ω の各コンパクト集合 K に対し番号 n_0 がとれ $n>n_0$ なら $\Omega_n\supset K$ となるようにできるなら，定理1は成り立つ．

$a|<r$ 内の任意の閉曲線とすると，$n>n_0$ のときコーシーの定理より

$$\int_\gamma f_n(z)dz=0$$

となる．γ の上で一様収束だから

$$\int_\gamma f(z)dz=\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)dz=0$$

となり，モレラの定理から $f(z)$ は $|z-a|<r$ で解析的なことがわかる．ゆえに，$f(z)$ は全領域 Ω で解析的である．

C を円周 $|\zeta-a|=r$ とし $|z-a|<r$ とすると，積分公式

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

が成り立つが，これを使うと別のそしてもっと具体的な証明ができる．n を ∞ に近づけると，一様収束より

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

となり，この式は $f(z)$ が $|z-a|<r$ で解析的なことを示している．公式

$$f_n'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

から出発すると，同様にして

$$\lim_{n\to\infty}f_n'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta=f'(z)$$

となり，簡単な評価でこの収束は $|z-a|\leqq\rho<r$ で一様なことがわかる．Ω の任意のコンパクト部分集合はこのような閉円板の有限個でおおうことができ，したがって任意のコンパクト部分集合上で収束は一様である．これで定理は証明できた．くり返し用いると，Ω の任意のコンパクト部分集合の上で一様に，$f_n^{(k)}(z)$ は $f^{(k)}(z)$ に収束することがわかる．

定理1はこれと同値な定式化でワイエルシュトラスが示した．解析関数を項とする級数への応用がとくに重要である．定理は次のようにのべられる：

各項が解析関数の級数

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

が Ω の各コンパクト部分集合の上で一様収束するならば，和 $f(z)$ は Ω で解析的となり，級数は項別微分してもよい．

コンパクト集合 A 上で一様収束することを確かめるには最大値の原理を用いれば易しくなる．定理1と同じ記号を用いて，差 $|f_m(z)-f_n(z)|$ は A 上での最大値を A の境界の上でとる．したがって，A の境界上で一様収束すれば A 上で一様収束する．例えば，$f_n(z)$ が $|z|<1$ で解析的で，$\lim_{m\to\infty} r_m=1$ となる $r_m<1$ があり各 $|z|=r_m$ の上で一様収束しておれば，ワイエルシュトラスの定理を用いて極限関数が解析的であると結論できる．

次の定理は A. フルヴィッツによるものである：

定理 2　領域 Ω で $f_n(z)$ は解析的でつねに $\neq 0$ とし，Ω の各コンパクト集合上で一様に $f_n(z)$ は $f(z)$ に収束するとする．このとき，$f(z)$ は Ω で恒等的に 0 か，または Ω で決して 0 になることはない．

$f(z)$ は恒等的に 0 という関数ではないと仮定しよう．$f(z)$ の零点はこのとき孤立している．任意の点 $z_0\in\Omega$ に対し $0<|z-z_0|\leq r$ が Ω に含まれそこで $f(z)\neq 0$ となるように $r>0$ がとれる．とくに，$|f(z)|$ は円周 $|z-z_0|=r$ 上で最小値をもちそれは正数である．この円周を C とかくと，$1/f_n(z)$ は $1/f(z)$ に C 上で一様収束する．C 上で一様に $f_n'(z)\to f'(z)$ もいえるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

が成り立つ．この左辺の積分は C の内部にある方程式 $f_n(z)=0$ の根の個数を与えるから，仮定によりみな 0 である　ゆえに右辺の積分も 0 で，同様にこの積分の意味から $f(z_0)\neq 0$ をうる．z_0 は Ω の任意の点だから定理がいえた．

問　題

1. テイラーの定理を $\log(1+z/n)$ の枝に用いて，任意のコンパクト集合上で

次の収束は一様であることを証明せよ：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z.$$

2. 級数

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

は Re $z>1$ のとき収束することを示し，その導関数を級数の形で表せ.

3.
$$(1-2^{1-z})\zeta(z)=1^{-z}-2^{-z}+3^{-z}-\cdots$$
を証明し，右辺の級数は Re $z>0$ のとき解析関数を表示していることを示せ.

4. 定理2の一般化として，$f_n(z)$ の零点が Ω で高々 m 個ならば，$f(z)$ は恒等的に0か，または零点が高々 m 個かどちらかであることを証明せよ.

5. $|z|<1$ のとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^n}{1-z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(1-z^n)^2}$$

を証明せよ.（2重級数に展開し，和の順序を交換せよ.）

1.2. テイラー級数

解析関数はすべて収束するテイラー級数に展開できることを証明しよう．これは4章3.1節定理8で与えた有限項までのテイラー展開と剰余項の表示とからほとんどすぐえられる．この定理により，$f(z)$ が z_0 を含む領域で解析的ならば

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+f_{n+1}(z)(z-z_0)^{n+1}$$

とかけ，

$$f_{n+1}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}(\zeta-z)}d\zeta$$

である．ここで，C は $|z-z_0|\leqq\rho$ が Ω に含まれるようにとった円周 $|z-z_0|=\rho$ である．

C 上での $|f(z)|$ の最大値を M とかくと，直ちに評価

$$|f_{n+1}(z)(z-z_0)^{n+1}|\leqq\frac{M|z-z_0|^{n+1}}{\rho^n(\rho-|z-z_0|)}$$

をうる．剰余項は $|z-z_0|\leqq r<\rho$ で一様に0に行くことがいえる．一方，ρ は

z_0 から Ω の境界までの最短距離にいくらでも近くにとることができる．これで次の定理が証明できた：

定理 3　$f(z)$ が点 z_0 を含む領域 Ω で解析的とすると，z_0 を中心とする Ω に含まれる最大の開円板において

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots$$

が成り立つ．

このテイラー級数の収束半径は，z_0 から Ω の境界までの最短距離以上である．それは本当に大きいこともある．しかしそのとき，この級数が Ω と収束円の共通部分のすべての点で $f(z)$ を表しているという保証はない．

定義として用いた展開

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots$$

を思い出そう．もちろん，前に注意したように各整級数は自分自身のテイラー級数である．整級数は項別微分できることを前に直接に証明したが，これはまたワイエルシュトラスの定理からも導かれる．

z の分数べき乗や $\log z$ を整級数で表そうとすると，まず枝をきちんときめ，次に中心 $z_0\neq 0$ をきめねばならない．これは $(1+z)^\mu$ または $\log(1+z)$ を，原点でそれぞれ 1 または 0 に等しい枝をとり，原点を中心に展開すれば，他の場合も同様になる．この枝は $|z|<1$ で 1 価で解析的だから収束半径は少くとも 1 である．初等的計算で係数は求まり，

$$(1+z)^\mu=1+\mu z+\binom{\mu}{2}z^2+\cdots+\binom{\mu}{n}z^n+\cdots$$

$$\log(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\cdots$$

となる．ここで二項係数は次のように定義する：

$$\binom{\mu}{n}=\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}.$$

もし対数の級数が1より大きい収束半径をもつと，$\log(1+z)$ は $|z|<1$ で有界になるはずである．しかしこうではないから，収束半径はちょうど1でなければならない．同様に，もし二項級数が半径 >1 の円で収束したとするなら，その導関数はすべて $|z|<1$ で有界になってしまう．μ が正整数でないならば何階かの導関数は $(1+z)$ の負べきになり有界ではない．したがって，二項級数が多項式になってしまう自明な場合を除いて，収束半径はちょうど1である．

逆三角関数 $\arctan z$, $\arcsin z$ の整級数展開は，導関数の級数を考えるのが早道である．

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+\cdots$$

を積分して

$$\arctan z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\cdots$$

をうる．ここで，$\arctan z$ の枝は，単位円内の任意の曲線にそう積分

$$\arctan z=\int_0^z\frac{dz}{1+z^2}$$

により一意的に定まる．証明としては，一様収束に頼るか定理1を適用するか，どちらでもよい．収束半径は導関数の級数のそれより大きくはなれず，したがってちょうど1である．

$\sqrt{1-z^2}$ は実部が正の枝を表すとすると，$|z|<1$ において

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}=1+\frac{1}{2}z^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}z^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}z^6+\cdots$$

となり，積分して

$$\arcsin z=z+\frac{1}{2}\frac{z^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{z^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{z^7}{7}+\cdots$$

をうる．この級数は実部が $-\pi/2$ と $\pi/2$ の間にある $\arcsin z$ の主値を表している．

初等関数をいろいろ合成した関数に対して，その整級数の一般項を求めるのはたいてい不可能である．しかし，はじめの何項かだけを求めるのならば，高階の微分係数を計算する必要はない．必要な項までの係数を適当な労力で計算する簡単な方法がある．

原点で解析的で少くとも n 位の零点をもつ関数を，$[z^n]$ と略記することにすれば便利である；大雑把にいうと，$[z^n]$ は因数 z^n を含む関数を表している．この記号を用いると，原点で解析的な関数は

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+[z^{n+1}]$$

とかけ，係数は一意的に定まりそれは $f(z)$ のテイラー展開の係数に等しい．ゆえに，テイラー展開の最初の n 項を求めるには，多項式 $P_n(z)$ をきめて $f(z)-P_n(z)$ が原点で少くとも $n+1$ 位の零点をもつようにすれば十分である．ここで，$P_n(z)$ の次数はどうでもかまわない；$m\leqq n$ ならば $P_n(z)$ の z^m の係数は $f(z)$ のテイラー展開の係数である．

例えば，

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

$$g(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n+\cdots$$

としよう．これを簡単に

$$f(z)=P_n(z)+[z^{n+1}],\quad g(z)=Q_n(z)+[z^{n+1}]$$

とかく．すると，明らかに $f(z)g(z)=P_n(z)Q_n(z)+[z^{n+1}]$ となり，P_nQ_n の次数 $\leqq n$ の係数は積 $f(z)g(z)$ のテイラー係数である．きちんとかくと，

$$f(z)g(z)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)z+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)z^n+\cdots$$

となる．この式を導くのに収束の問題に注意をしなかったが，しかしこの展開は $f(z)g(z)$ のテイラー展開に等しいから，定理3により与えられた級数 $f(z)$, $g(z)$ の収束半径の小さい方よりは以上の収束半径をもつ．P_nQ_n を実際

に計算するときに n 次より高い次数を計算する必要はもちろんない.

商 $f(z)/g(z)$ のときにも，$g(0)=b_0\neq 0$ と仮定すれば同じ方法が適用できる. 普通の長い割算を余りが z^{n+1} 以上の項になるまでして，多項式 R_n を $P_n=Q_nR_n+[z^{n+1}]$ となるようにきめることができる. すると，$f-R_ng=[z^{n+1}]$ となり，$g(0)\neq 0$ だから $f/g=R_n+[z^{n+1}]$ をうる. R_n の係数が $f(z)/g(z)$ のテイラー係数である. この係数は行列式を用いてきちんとかくこともできるが，複雑すぎて本質的な助けにはならない.

合成関数 $f(g(z))$ の展開の形を調べることは重要である. この場合，$g(z)$ が z_0 を中心にして展開されておれば，$f(w)$ は $w-g(z_0)$ のべきに展開されていなければならない. 簡単のために $z_0=0$, $g(0)=0$ と仮定しよう. すると，

$$f(w)=a_0+a_1w+\cdots+a_nw^n+\cdots$$

$$g(z)=b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n+\cdots$$

とおくことができる. 前と同様に，$f(w)=P_n(w)+[w^{n+1}]$, $g(z)=Q_n(z)+[z^{n+1}]$, $Q_n(0)=0$ とかく. $w=g(z)$ を代入すると，$[w^{n+1}]$ とかける式はつねに $[z^{n+1}]$ になることと

$$P_n(Q_n+[z^{n+1}])=P_n(Q_n(z))+[z^{n+1}]$$

とがわかる. これから $f(g(z))=P_n(Q_n(z))+[z^{n+1}]$ となり，$f(g(z))$ のテイラー係数は $P_n(Q_n(z))$ の次数 $\leqq n$ の係数である.

最後に，解析関数 $w=g(z)$ の逆関数の展開をする. $g(0)=0$ と仮定し，原点の近傍で解析的で $w=0$ で 0 となる逆関数 $z=g^{-1}(w)$ の枝を求めよう. 逆関数が存在するためには，$g'(0)\neq 0$ が必要十分条件である；ゆえに，

$$g(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots=Q_n(z)+[z^{n+1}]$$

とし，$a_1\neq 0$ と仮定する. 問題は $P_n(Q_n(z))=z+[z^{n+1}]$ となるような多項式 $P_n(w)$ をきめることである. 実際，$a_1\neq 0$ という仮定から，記号 $[z^{n+1}]$ と記号 $[w^{n+1}]$ は取り換え可能であり，$z=P_n(Q_n(z))+[z^{n+1}]$ から $z=P_n(g(z)+[z^{n+1}])+[z^{n+1}]=P_n(w)+[w^{n+1}]$ をうる. ゆえに，$P_n(w)$ は $g^{-1}(w)$ の係数をきめる.

多項式 P_n の存在を示すのには帰納法を用いる. 明らかに $P_1(w)=w/a_1$ に

とれる．P_{n-1} がえられたとして，$P_n=P_{n-1}+b_nw^n$ とおくと，

$$\begin{aligned}P_n(Q_n(z))&=P_{n-1}(Q_n(z))+b_na_1{}^nz^n+[z^{n+1}]\\&=P_{n-1}(Q_{n-1}(z)+a_nz^n)+b_na_1{}^nz^n+[z^{n+1}]\\&=P_{n-1}(Q_{n-1}(z))+P_{n-1}{}'(Q_{n-1}(z))a_nz^n+b_na_1{}^nz^n+[z^{n+1}]\end{aligned}$$

をうる．最後の式の最初の 2 項の和は $z+c_nz^n+[z^{n+1}]$ の形をした既知の多項式で，$b_n=-c_na_1{}^{-n}$ にとれば求めるものである．

実際に用いるときには，逆関数の展開を求めるには代入を次々とくり返していけばよい．その方法を例で示すために，級数

$$w=\operatorname{arc\,tan} z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\cdots$$

から，$\tan w$ の展開を求めてみよう．5 乗の項まで求めたいとすると，

$$z=w+\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}+[z^7]$$

とかいて，右辺の各項にこれを代入する．剰余項を適当にして，

$$\begin{aligned}z&=w+\frac{1}{3}\left(w+\frac{z^3}{3}+[w^5]\right)^3-\frac{1}{5}(w+[w^3])^5+[w^7]\\&=w+\frac{1}{3}w^3+\frac{1}{3}w^2z^3-\frac{1}{5}w^5+[w^7]\\&=w+\frac{1}{3}w^3+\frac{1}{3}w^2(w+[w^3])^3-\frac{1}{5}w^5+[w^7]=w+\frac{1}{3}w^3+\frac{2}{15}w^5+[w^7]\end{aligned}$$

をうる．ゆえに，$\tan w$ の展開は

$$\tan w=w+\frac{1}{3}w^3+\frac{2}{15}w^5+\cdots$$

となる．

問　題

1. a を実数として $z-a$ の整級数に，$1/(1+z^2)$ を展開せよ．一般項を求め，$a=1$ のときにそれを簡単な形にせよ．

2. 整級数展開

$$(1-2\alpha z+z^2)^{-1/2}=1+P_1(\alpha)z+P_2(\alpha)z^2+\cdots$$

の係数 $P_n(\alpha)$ として定義される多項式を，ルジャンドル多項式という．P_1, P_2, P_3, P_4 を求めよ．

3. $\log(\sin z/z)$ を z の整級数に展開せよ．z^6 の項まで求めればよい．
4. $\tan z$ のテイラー展開の，z^7 の係数はいくらか．
5. フィボナッチ数は，$c_0=0, c_1=1$ として

$$c_n=c_{n-1}+c_{n-2}$$

により定義される．c_n を係数とする整級数は有理関数のテイラー展開であることを示し，c_n を n の式で表せ．

1.3. ローラン級数

$$b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_nz^{-n}+\cdots \tag{1}$$

という形の級数は $1/z$ の整級数と考えられる．したがって，$R=\infty$ のときを例外として，ある円 $|z|=R$ の外で収束する；収束は各領域 $|z|\geqq\rho>R$ では一様で，ゆえにこの級数は $|z|>R$ で解析関数を表す．級数(1)と普通の整級数を組み合わせて，

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_nz^n \tag{2}$$

という形のもっと一般な級数をうる．非負べきの項からなる部分と負べきの項からなる部分がそれぞれ収束するときに，この級数は収束するという．非負べきの級数は円 $|z|<R_2$ で収束し負べきの級数は $|z|>R_1$ で収束するから，$R_1<R_2$ のときだけ共通の収束域があり(2)は円環領域 $R_1<|z|<R_2$ で解析関数を表す．

逆に，定義域が円環領域 $R_1<|z|<R_2$，もっと一般に $R_1<|z-a|<R_2$ を含むような解析関数 $f(z)$ から出発してもよい．このような関数は，つねに

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(z-a)^n$$

という形の級数に展開できることがわかる(これを**ローラン級数**という)．

証明は非常に簡単である．示すべきことは，$f(z)$ が $f_1(z)+f_2(z)$ と和にかけ，$f_1(z)$ は $|z-a|<R_2$ で解析的で，$f_2(z)$ は $|z-a|>R_1$ で解析的で ∞ が除去可

能特異点になるもの，とできることである．こうできれば，$f_1(z)$ は $(z-a)$ の非負べきの整級数に，$f_2(z)$ は $1/(z-a)$ の非負べきの整級数に展開できる．

$f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ と表すために，$|z-a|<r<R_2$ で $f_1(z)$ を

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

と定義し，$R_1<r<|z-a|$ で $f_2(z)$ を

$$f_2(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

と定義する．両方の積分において，条件の不等式をみたしているかぎり r の値はどうでもよい．コーシーの定理により，円周が点 z を通らない範囲に r をかえても積分の値はかわらないからである．したがって，$f_1(z), f_2(z)$ はそれぞれ $|z-a|<R_2$, $|z-a|>R_1$ で定義され解析的である．さらに，コーシーの積分公式から $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ である．

$f_1(z)$ のテイラー展開を

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-a)^n$$

とすれば，係数は

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \tag{3}$$

である．$f_2(z)$ の展開を求めるために，$\zeta=a+1/\zeta'$, $z=a+1/z'$ と変換する．この変換で，$|\zeta-a|=r$ は $|\zeta'|=1/r$ に写り向きは負の向きになり，簡単な計算で

$$f_2\left(a+\frac{1}{z'}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta'|=1/r}\frac{z'}{\zeta'}\frac{f(a+1/\zeta')}{\zeta'-z'}d\zeta'=\sum_{n=1}^{\infty}B_n z'^n$$

がえられ，係数は

$$B_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta'|=1/r}\frac{f(a+1/\zeta')}{\zeta'^{n+1}}d\zeta'=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta$$

となる．この式から，

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(z-a)^n$$

とかくことができ，すべての係数は(3)によってきまることがわかる．(3)の積分は $R_1<r<R_2$ であるかぎり r にはよらない．

$R_1=0$ のときは点 a は孤立特異点であり，$A_{-1}=B_1$ は a での留数となる．というのは，$f(z)-A_{-1}(z-a)^{-1}$ は $0<|z-a|<R_2$ で1価関数の導関数になるからである．

問　題

1. ローラン展開は一意的であることを証明せよ．

2. Ω は2重連結領域で，Ω の補集合の連結成分を E_1, E_2 とする．Ω での解析関数 $f(z)$ は常に $f_1(z)+f_2(z)$ とかけ，$f_1(z)$ は E_1 の外で解析的，$f_2(z)$ は E_2 の外で解析的，とできることを示せ．(きちんとした証明には，4章4.5節のような構成が必要である．)

3. f のシュヴァルツ微分とは

$$\{f, z\}=\frac{f'''(z)}{f'(z)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

のことである．f が重複零点または重複極をもつときに，$\{f, z\}$ のローラン展開の最初の項を求めよ．(答．$f(z)=a(z-z_0)^m+\cdots$ のとき，$\{f, z\}=\frac{1}{2}(1-m^2)(z-z_0)^{-2}+\cdots$　となる．)

4. $(e^z-1)^{-1}$ の原点でのローラン展開が

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}z^{2k-1}$$

の形であることを示せ．ここで，B_k はベルヌーイ数とよばれる．B_1, B_2, B_3 を計算せよ．(2.1節問5により，B_k はすべて正数である．)

5. ベルヌーイ数を用いて，$\tan z$ のテイラー展開と $\cot z$ のローラン展開をかけ．

2．部分分数と因数分解

有理関数は二つの標準的な表示があり，一つは部分分数展開であり，もう一つは分母分子を因数分解することである．この節では，有理形関数に対する同様の表示を扱う．

2.1. 部分分数　関数 $f(z)$ が領域 Ω で有理形とすると，極 b_ν に $f(z)$ の b_ν での特異部が対応し，それはローラン展開の $(z-b_\nu)$ の負べきの項からなる部分である；それは多項式 $P_\nu(1/(z-b_\nu))$ となる．$g(z)$ を Ω での解析関数として

$$f(z)=\sum_\nu P_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right)+g(z) \tag{4}$$

という形の表示をうるために，$f(z)$ から特異部をすべて引いてしまいたい．しかし，右辺の和は一般には無限和であり，その級数が収束するという保証はない．けれども，この級数が収束する場合がしばしばあり，さらに一般的な考察から $g(z)$ を具体的にきめることが出来ることも多い．このときには，結果は非常に価値がある；たいへん役に立つと思われる簡単な展開がえられたわけである．

(4)の級数が収束しないときは，方法を修正する必要がある．各特異部 P_ν から解析関数 $p_\nu(z)$ を引いても，本質的に失われるものがないことは明らかである．関数 $p_\nu(z)$ をうまくとれば $\sum(P_\nu-p_\nu)$ を収束するようにできる．さらに，$p_\nu(z)$ を多項式にとることさえ可能である．

ここでは一般な定理は証明しない．Ω が全平面の場合にかぎり，任意の有理形関数が部分分数に展開できることを証明し，さらに特異部を任意に与えうることを示す．この定理とその任意の領域への一般化はミッタグ・レフラーによるものである．

定理 4　$\{b_\nu\}$ を複素数列で $\lim_{\nu\to\infty} b_\nu=\infty$ とし，$P_\nu(\zeta)$ は定数項のない多項式とする．このとき，各 b_ν を極にもち b_ν での特異部が $P_\nu(1/(z-b_\nu))$ であるような全平面での有理形関数 $f(z)$ が存在する．さらに，このような有理形関数は常に，$p_\nu(z)$ を適当な多項式とし $g(z)$ を全平面での解析関数として

$$f(z)=\sum_\nu\left[P_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right)-p_\nu(z)\right]+g(z) \tag{5}$$

という形でかける．

---

b_ν はすべて 0 でないと仮定してよい．関数 $P_\nu(1/(z-b_\nu))$ は $|z|<|b_\nu|$ で解析的だから，原点を中心にテイラー級数に展開できる．$p_\nu(z)$ として，この級数の n_ν 次までの項の部分和をとる．差 $P_\nu-p_\nu$ は 4 章 3.1 節でえられた剰余項の表示を用いて評価できる．$|z|\leqq|b_\nu|/2$ における $|P_\nu|$ の最大値を M_ν とすると，

$$(6)\qquad \left|P_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right)-p_\nu(z)\right|\leqq 2M_\nu\left(\frac{2|z|}{|b_\nu|}\right)^{n_\nu+1}$$

が $|z|\leqq|b_\nu|/4$ のとき成立する．この評価から，n_ν を十分大きくとっておけば，極を除き全平面で (5) の右辺の級数が絶対収束することは明らかであろう．例えば，$2^{n_\nu}\geqq M_\nu 2^\nu$ となるように n_ν を大きくとっておけば，評価 (6) より，十分大きなすべての ν に対し一般項が $2^{-\nu}$ で上からおさえられる．

さらに，この評価は任意の閉円板 $|z|\leqq R$ で一様に成り立ち，$|b_\nu|\leqq R$ となる項を除けば，この級数はこの円で一様収束する．ワイエルシュトラスの定理よりこれは $|z|\leqq R$ で解析関数となり，$|b_\nu|\leqq R$ となる項をつけ加えれば有理形関数となる．結局，全体の級数は全平面で有理形関数となり，特異部 $P_\nu(1/(z-b_\nu))$ をもつ．定理の残りは明らかであろう．

最初の例として，関数 $\pi^2/\sin^2\pi z$ を考える．これは整数 n に対し点 n で 2 位の極をもち，原点での特異部は $1/z^2$ であり，$\sin^2\pi(z-n)=\sin^2\pi z$ より $z=n$ での特異部は $1/(z-n)^2$ である．級数 $\sum_1^\infty 1/n^2$ と比較して

$$(7)\qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$$

は $z\neq n$ のとき収束することがわかる．任意のコンパクト集合の上で，この集合の上に極をもつ項を除くと，残りは一様収束する．ゆえに，全平面で解析的な $g(z)$ があり

$$(8)\qquad \frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}+g(z)$$

とかくことができる．$g(z)$ が実は恒等的に 0 になることを示そう．

証明のために，関数 $\pi^2/\sin^2\pi z$ と級数 (7) がともに周期 1 をもつことをみ

る．したがって，関数 $g(z)$ も同じ周期をもつ．$z=x+iy$ とおく

$$|\sin \pi z|^2 = \cosh^2 \pi y - \cos^2 \pi x$$

となり（2章3.2節問4），ゆえに $|y|\to\infty$ で一様に $\pi^2/\sin^2 \pi z$ は0に収束する．関数(7)が同じ性質をもつことは見易い．実際，収束は $|y|\geqq 1$ で一様で，$|y|\to\infty$ のときの極限は各項で極限をとることによりえられるからである．$|y|\to\infty$ のとき一様に $g(z)$ が0に収束することがわかった．これから $|g(z)|$ は平行な帯 $0\leqq x\leqq 1$ において有界となり，周期性から $|g(z)|$ は全平面で有界となる．リュービルの定理から $g(z)$ は定数となり極限が0だから定数は0でなければならない．これで次の等式が証明できた：

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}. \tag{9}$$

この等式から，両辺を積分して関連した等式がえられる．左辺は $-\pi \cot \pi z$ の導関数であり，右辺の各項は $-1/(z-n)$ の導関数である．一般項 $1/(z-n)$ の級数は発散するから，$n\neq 0$ の各項からそのテイラー級数の部分和を引かねばならない．たまたま定数項を引いてみればこれで十分である．というのは

$$\sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n\neq 0}\frac{z}{n(z-n)}$$

は $\sum_{1}^{\infty} 1/n^2$ と比較できて収束するからである．任意のコンパクト集合の上で，無限大になる項を除いておけば収束は一様である．ゆえに，項別微分が許されて，定数の差を無視して

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) \tag{10}$$

が成り立つ．n と $-n$ の項をまとめてやると(10)は

$$\pi \cot \pi z = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2} \tag{11}$$

ともかける．こうしてみると，両辺はともに z の奇関数であることがわかり，

したがって，積分定数は0でなければならない．これで，(10)と(11)は正確な等式であることがわかる．

順序を逆にして，類似の和

$$(12)\qquad \lim_{m\to\infty}\sum_{-m}^{m}\frac{(-1)^n}{z-n}=\frac{1}{z}+\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}$$

を求めることを試みよう．これは明らかに有理形関数を表す．偶数項と奇数項にわけて

$$\sum_{-(2k+1)}^{2k+1}\frac{(-1)^n}{z-n}=\sum_{n=-k}^{k}\frac{1}{z-2n}-\sum_{n=-k-1}^{k}\frac{1}{z-1-2n}$$

とかくのはもっともである．(11)と比べてこの極限は

$$\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi z}{2}-\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi(z-1)}{2}=\frac{z}{\sin\pi z}$$

となることがわかり，次の式が証明できた：

$$(13)\qquad \frac{\pi}{\sin\pi z}=\lim_{m\to\infty}\sum_{-m}^{m}(-1)^n\frac{1}{z-n}\ .$$

問　題

1. $\cot\pi z$ のローラン展開の係数と部分分数の和としての表現の係数とを比べることにより，次の級数の値を求めよ：

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\qquad \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^4},\qquad \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^6}.$$

必要ならば各段階での完全な証明を与えること．

2. 次の級数の和をきちんとした式でかけ：

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^3-n^3}\ .$$

3. (13)を用いて $1/\cos\pi z$ の部分分数展開を求め，次の式を示せ：

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\ .$$

4. 次の級数の和は何か：

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2+a^2}\ .$$

5. 問 1 と同じ方法を用いて次の式を示せ (B_k の定義は 1.3節問 4 をみよ)：

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^{2k}}=2^{2k-1}\frac{B_k}{(2k)!}\pi^{2k}.$$

2.2. 無限積　複素数の無限積

$$p_1p_2\cdots p_n\cdots=\prod_{n=1}^\infty p_n \tag{14}$$

は，部分積 $P_n=p_1p_2\cdots p_n$ の極限をとることにより計算される．この極限が存在し 0 でないとき，値 $P=\lim_{n\to\infty} P_n$ にそれは収束するという．値 0 を除くのはいろいろ理由がある．その一つとして，もし $P=0$ を許したとすると一つでも因数が 0 ならば無限積は収束することになり，収束するかどうかが因数の列全部に関係しなくなる．他方，ある面ではこの規約はきびしすぎる．実際，われわれは関数を無限積で表したく，これは関数が零点をもっているときにも可能にしなければならない．したがって次のような約束をする：無限積(14)が収束するというのは，因数のうち 0 であるのは高々有限個でそれを除いた 0 でない因数の作る部分積が 0 とは異なる有限の極限値に収束することである．

収束する無限積では，一般項 p_n は 1 に収束する；これは 0 である因数は除いて $p_n=P_n/P_{n-1}$ とかいてみれば明らかである．このことから，無限積は

$$\prod_{n=1}^\infty (1+a_n) \tag{15}$$

という形でかく方がよく，こうすれば $a_n\to 0$ は収束の必要条件である．

因数がすべて 0 でないとき，無限積(15)を無限級数

$$\sum_{n=1}^\infty \log(1+a_n) \tag{16}$$

と比べるのは自然である．a_n は複素数だから対数の枝をはっきり定めねばならないが，各項で主値をとることにきめる．(16)の部分和を S_n とおく．すると $P_n=e^{S_n}$ であり，$S_n\to S$ ならば P_n は極限 $P=e^S$ に収束し $P\neq 0$ であ

る．いいかえると，(16)の収束は(15)の収束のための十分条件である．

これが必要条件でもあることを証明するために，$P_n \to P \neq 0$ と仮定する．級数 (16) で各項の主値をとったときに $\log P$ の主値に収束するとはかぎらない．示したいのは，それが $\log P$ のどれかの値に収束することである．はっきりさせるために，しばらくの間，対数の主値を Log とかきその虚部を Arg とかくことにする．

$n \to \infty$ のとき，$P_n/P \to 1$ より $\mathrm{Log}\,(P_n/P) \to 0$ である．$\mathrm{Log}\,(P_n/P) = S_n - \mathrm{Log}\,P + h_n \cdot 2\pi i$ となるような整数 h_n が存在する．差をとり，$(h_{n+1} - h_n) \cdot 2\pi i = \mathrm{Log}\,(P_{n+1}/P) - \mathrm{Log}\,(P_n/P) - \mathrm{Log}\,(1+a_n)$ で，ゆえに $(h_{n+1} - h_n) \cdot 2\pi = \mathrm{Arg}(P_{n+1}/P) - \mathrm{Arg}(P_n/P) - \mathrm{Arg}(1+a_n)$ となる．定義より $|\mathrm{Arg}\,(1+a_n)| \leqq \pi$ であり，$\mathrm{Arg}\,(P_{n+1}/P) - \mathrm{Arg}\,(P_n/P) \to 0$ がわかっている．これは，大きな n に対し，$h_{n+1} = h_n$ でなければ前の式に矛盾する．ゆえに，h_n は最終的には1つのきまった整数 h に等しくなり，$\mathrm{Log}\,(P_n/P) = S_n - \mathrm{Log}\,P + h \cdot 2\pi i$ から $S_n \to \mathrm{Log}\,P - h \cdot 2\pi i$ がいえる．これで次の定理の証明ができた：

定理 5　$1 + a_n \neq 0$ とすると，無限積 $\prod_1^\infty (1+a_n)$ が収束するための必要十分条件は級数 $\sum_1^\infty \log\,(1+a_n)$ が収束することである．ただし，対数の値は主値をとることにきめておく（すなわち，$-\pi < \mathrm{Im}\,\log\,(1+a_n) \leqslant \pi$）．

これで無限積の収束は級数の収束という扱いなれた問題に帰着された．さらに，級数 (16) が絶対収束するための必要十分条件が $\sum |a_n|$ の収束であることをみれば，もっと還元される．これは，

$$\lim_{z \to 0} \frac{\log\,(1+z)}{z} = 1$$

から導かれる．級数 (16) か $\sum |a_n|$ かが収束すれば $a_n \to 0$ となり，$\varepsilon > 0$ を与えると十分大きな n に対し

$$(1-\varepsilon)|a_n| < |\log\,(1+a_n)| < (1+\varepsilon)|a_n|$$

が成立する．この不等式から2つの級数は同時に絶対収束する．

無限積は，対応する級数(16)が絶対収束するときに，絶対収束するという．この言葉を用いると，われわれの結果は次のように述べられる：

定理 6　無限積 $\prod_1^\infty (1+a_n)$ が絶対収束するための必要十分条件は $\sum_1^\infty |a_n|$ が収束することである．

この定理は絶対収束に関するものであることを強調しておく．簡単な例により，$\sum_1^\infty a_n$ の収束は $\prod_1^\infty (1+a_n)$ の収束のための必要条件でもなければ十分条件でもないことを示すことができる．

各因数が関数のときに，無限積が一様収束するという意味は明らかであろう．零点の存在がいささか困難をひきおこすが，高々有限個の因数だけが零点をもつような集合の上でだけ考えることにより，普通はその困難をさけうる．この零点をもつ因数を除けば，残りの積の一様収束を調べれば十分である．定理 5 と定理 6 は一様収束に対しても明らかな読みかえをして成立する．証明を調べなおすと，少くともコンパクト集合の上ではすべての評価を一様にすることができて，一様収束に対する結果をうる．

問　題

1. 次の式を示せ：

$$\prod_{n=2}^\infty \left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

2. $|z|<1$ に対し次の式を証明せよ：

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots=\frac{1}{1-z}.$$

3. 次の無限積は任意のコンパクト集合上で絶対一様収束することを示せ：

$$\prod_1^\infty \left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}.$$

4. 絶対収束する無限積の値は，因数の順序をかえてもかわらないことを証明せよ．

5. $|h|<1$ とするとき，関数

$$\theta(z)=\prod_1^\infty (1+h^{2n-1}e^z)(1+h^{2n-1}e^{-z})$$

は全平面で解析的なことを示し，次の関数等式をみたすことを示せ：

$$\theta(z+2\log h)=h^{-1}e^{-z}\theta(z).$$

2.3. 基本乗積　全平面で解析的な関数を**整関数**という．もっとも簡単な整関数で多項式でないものに $e^z, \sin z, \cos z$ などがある．

$g(z)$ が整関数ならば $f(z)=e^{g(z)}$ も整関数で $\neq 0$ である．逆に，$f(z)$ が整関数で零点をもたなければ，$f(z)$ が $e^{g(z)}$ の形になることを示そう．このためには，関数 $f'(z)/f(z)$ は全平面で解析的であり，ある整関数 $g(z)$ の導関数になっていることに注意する．これから計算により $f(z)e^{-g(z)}$ の導関数が 0 になることがいえ，ゆえに $f(z)$ は $e^{g(z)}$ の定数倍となる；定数は $g(z)$ の中にくりこんでしまうことができる．

この方法によって，有限個の零点をもつ整関数の一般形を見つけることができる．$f(z)$ は原点で m 位の零点をもつとし（m は 0 でもよい），そのほかの零点を $a_1, a_2, \cdots, a_N$ とし，重複零点は同じ点を重複して並べておく．そのとき，

$$f(z)=z^m e^{g(z)}\prod_1^N\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$$

とかけることは明らかである．

零点が無限個あるときには，無限積を用いて同様の表示をえようと試みることができる．明らかに一般化は

$$f(z)=z^m e^{g(z)}\prod_1^\infty\left(1-\frac{z}{a_n}\right) \tag{17}$$

の形になるだろう．この表示は，任意のコンパクト集合の上で無限積が一様収束するならば正しい．実際，もしそうなら，この積は整関数となり $f(z)$ と重複度もこめて同じ零点をもち（原点は除いて），商は $z^m e^{g(z)}$ の形になることがわかる．

(17) の無限積が絶対収束するのは $\sum_1^\infty 1/|a_n|$ が収束するとき，そのときだけであり，この場合には任意の閉円板 $|z|\leqq R$ で収束はまた一様である．この特別な条件の下でのみ，(17)の形の表示がえられるのである．

一般の場合には，各因数にあるものをかけて収束するようにしたい．$a_n \neq 0$ で $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ となるような任意の複素数列に対し，

$$\prod_1^\infty \left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{p_n(z)} \tag{18}$$

が整関数に収束するような多項式 $p_n(z)$ の存在を証明する．この積の収束は一般項が

$$r_n(z)=\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+p_n(z)$$

の級数の収束と同時である．ここで，対数の枝は $r_n(z)$ の虚部が $-\pi$ と π の間にあるようにとる（π の方に等号をつける）．

与えられた R に対し $|a_n|>R$ をみたす項だけ考えればよい．円板 $|z|\leqq R$ で $\log(1-z/a_n)$ の主値はテイラー級数に

$$\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)=-\frac{z}{a_n}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{z}{a_n}\right)^3-\cdots$$

と展開できる．符号をかえて $p_n(z)$ として部分和

$$p_n(z)=\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}$$

をとる．すると，$r_n(z)$ は

$$r_n(z)=-\frac{1}{m_n+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+1}-\frac{1}{m_n+2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+2}-\cdots$$

とかけ，容易に評価

$$|r_n(z)|\leqq\frac{1}{m_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1}\left(1-\frac{R}{|a_n|}\right)^{-1} \tag{19}$$

をうる．さて，級数

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{m_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1} \tag{20}$$

が収束すると仮定しよう．評価(19)よりまず $r_n(z)\to 0$ がわかり，ゆえに n が

十分大きければ $r_n(z)$ の虚部は $-\pi$ と π の間に入ることがわかる．さらに，優級数から $\sum r_n(z)$ は $|z|\leqq R$ で絶対一様収束がいえ，ゆえに無限積 (18) は $|z|<R$ において解析関数を表す．今迄の議論には $|a_n|\leqq R$ をみたすものは除かねばならなかったが，(18)の一様収束にはそのような項をつけ加えても影響はない．

すべての R に対し級数 (20) が収束するようにできることを示すことだけが残っている．しかし，これは明らかで，$m_n=n$ にとればよい．Rを任意にとめると，(20) は公比 <1 の幾何級数を優級数にもつからである．

定理 7　任意に与えられた点 a_n (ただし，無限個のときは $a_n\to\infty$ と仮定する) を零点とする整関数が存在する．この与えられた点を零点としそのほかには零点をもたない任意の整関数は

$$f(z)=z^m e^{g(z)}\prod_1^\infty\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}} \tag{21}$$

という形でかける．ここで，積は 0 でない a_n 全部についてとり，m_n はある整数，$g(z)$ は整関数である．

この定理はワイエルシュトラスによるものである．これから，次の重要な系がえられる：

系　全平面での有理形関数は整関数の商として表される．

実際，$F(z)$ が全平面で有理形とすると，$F(z)$ の極を零点にもつ整関数 $g(z)$ をみつけることができる．すると $F(z)g(z)$ は整関数 $f(z)$ となり，$F(z)=f(z)/g(z)$ である．

(21)式でもし m_n をすべて等しくとれるなら，かなり面白くなる．前の証明で示したように，無限積

$$\prod_1^\infty\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{h}\left(\frac{z}{a_n}\right)^h} \tag{22}$$

が収束し整関数を表す為には，すべての R に対し級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(R/|a_n|)^{h+1}/(h+1)$ が収束すればよい，すなわち $\sum 1/|a_n|^{h+1}<\infty$ とすればよい．この級数が収束するような最小の整数を h としよう；このとき，(22) を数列 $\{a_n\}$ に付随した**基本乗積**といい，h をその**種数**という．

可能なときにはいつでも，表示(21)において基本乗積を用いることにすると，それは一意的に定まる．この式でさらに $g(z)$ が多項式になるときに，関数 $f(z)$ は有限種数であるといい，$g(z)$ の次数と基本乗積の種数の大きい方を $f(z)$ の**種数**という．例えば，種数 0 の整関数は

$$Cz^m\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$$

とかけ，$\sum 1/|a_n|<\infty$ である．種数 1 の整関数は

$$Cz^me^{\alpha z}\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{z/a_n}$$

とかけ $\sum 1/|a_n|^2<\infty$, $\sum 1/|a_n|=\infty$ であるか，または

$$Cz^me^{\alpha z}\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$$

とかけ $\sum 1/|a_n|<\infty$, $\alpha\neq 0$ である．

応用として $\sin\pi z$ の積表示を考えよう．零点は整数 $z=\pm n$ である．$\sum 1/n$ は発散し $\sum 1/n^2$ は収束するから，$h=1$ となり

$$\sin\pi z=ze^{g(z)}\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}$$

という形の式をうる．$g(z)$ をきめるために両辺を対数微分すると，

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+g'(z)+\sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$

をうるが，整数を含まないような任意のコンパクト集合の上での一様収束よりこれが正しいことを確かめるのは容易である．前にえた公式(10)と比較し

て，$g'(z)=0$ がわかる．ゆえに $g(z)$ は定数であるが，$\lim_{z\to 0}\sin\pi z/z=\pi$ より $e^{g(z)}=\pi$ となり，これで

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n} \tag{23}$$

をうる．この式で，n と $-n$ に対応する因数をまとめると，簡単な形

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \tag{24}$$

となる．

(23) から $\sin\pi z$ は種数1の整関数である．

問　題

1. $a_n\to\infty$ とし A_n は任意の複素数と仮定する．$f(a_n)=A_n$ をみたす整関数 $f(z)$ が存在することを示せ．

ヒント：$g(z)$ を a_n で1位の零点をもつ関数とする．数 γ_n をうまくとると，

$$\sum_{1}^{\infty} g(z)\frac{e^{\gamma_n(z-a_n)}}{z-a_n}\cdot\frac{A_n}{g'(a_n)}$$

は収束することを示せ．

2. α が整数でないとき，

$$\sin\pi(z+\alpha)=e^{\pi z\cot\pi\alpha}\prod_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n+\alpha}\right)e^{-z/(n+\alpha)}$$

を証明せよ．ヒント：基本乗積の前にある因数を $g(z)$ とかき，$g'(z)/g(z)$ を定めよ．

3. $\cos\sqrt{z}$ の種数はいくらか．

4. $f(z)$ の種数を h とするとき，$f(z^2)$ の種数を上からと下からと評価せよ．

5. $f(z)$ の種数は0か1で，零点は実数だけで，z が実数のときは $f(z)$ も実数値とする．このとき，$f'(z)$ の零点はすべて実数になることを示せ．ヒント：$\mathrm{Im}\,f'(z)/f(z)$ を考えよ．

2.4. ガンマ関数　$\sin\pi z$ はすべての整数を零点とし，この性質をもつ関数の中でもっとも簡単である．ここで，正整数だけを，または負整数だけを零点にもつような関数を導入しよう．例えば，負整数だけを零点にもつも

っとも簡単な関数は，対応する基本乗積

$$G(z)=\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n} \tag{25}$$

である．このとき，$G(-z)$ は正整数だけを零点にもつことは明らかで，$\sin\pi z$ の積表示(23)と比べて直ちに次の式をうる：

$$zG(z)G(-z)=\frac{\sin\pi z}{\pi}. \tag{26}$$

$G(z)$ の作り方から，それはほかに簡単な性質をもつはずである．$G(z-1)$ は $G(z)$ と同じ零点をもち，さらに原点が零点になっている．したがって，

$$G(z-1)=ze^{\gamma(z)}G(z)$$

とかけ，$\gamma(z)$ は整関数である．$\gamma(z)$ をきめるために，両辺の対数微分をとる．これから，方程式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{z}+\gamma'(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right) \tag{27}$$

をうる．左辺の級数で n を $n+1$ におきかえる．これにより

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{z}-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{z}-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

となる．最後の級数の和は1であり，ゆえに方程式(27)から $\gamma'(z)=0$ をうる．したがって $\gamma(z)$ は定数となり γ とかくことにすると，$G(z)$ は再生的な性質 $G(z-1)=e^{\gamma}zG(z)$ をみたす．関数 $H(z)=G(z)e^{\gamma z}$ を考えれば少し簡単になり，$H(z)$ は関数等式 $H(z-1)=zH(z)$ をみたす．

γ の値は容易にきめられる．$z=1$ にとると

$$1=G(0)=e^{\gamma}G(1)$$

となり，ゆえに，

$$e^{-\gamma}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-1/n}$$

である．ここで，n 項までの部分積は

$$(n+1)e^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})}$$

となり，

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

をうる．定数 γ はオイラーの定数とよばれる：その近似値は 0.57722 である．

$H(z)$ が $H(z-1)=zH(z)$ をみたすならば，$\Gamma(z)=1/[zH(z)]$ は

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z) \tag{28}$$

をみたす．これはもっと有用な関係であることがわかり，この理由により初等関数という限られた範囲に，オイラーの**ガンマ関数**とよばれる $\Gamma(z)$ を含めるのが習慣となってきた．

定義にもとづいてはっきりかくと

$$\Gamma(z)=\frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{z/n} \tag{29}$$

となり，(26) は次の形になる：

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}. \tag{30}$$

$\Gamma(z)$ は全平面で有理形関数で，$z=0,\ -1,\ -2,\ \cdots$ に極をもつが，零点はもたない．

$\Gamma(1)=1$ となり，関数等式から $\Gamma(2)=1$, $\Gamma(3)=1\cdot 2$, $\Gamma(4)=1\cdot 2\cdot 3$ で一般に $\Gamma(n)=(n-1)!$ をうる．こうして，ガンマ関数は階乗の一般化とみなされる．(30) から $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ がわかる．

$\log\Gamma(z)$ の 2 階導関数を考えると，(29) より非常に簡単な式

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2} \tag{31}$$

となり，これから他の性質が導かれる．例えば，$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$ と $\Gamma(2z)$ は明らかに同じ極をもち，(31)を用いると

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n+\frac{1}{2})^2}$$

$$=4\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2z+2n)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2z+2n+1)^2}\right]=4\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2z+m)^2}$$

$$=2\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right)$$

がわかる．積分して

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=e^{az+b}\Gamma(2z)$$

となるが，定数 a, b をきめなければならない．$z=1/2, z=1$ を代入し $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$，$\Gamma(1)=1$ を用いると，$\Gamma(1+1/2)=\Gamma(1/2)/2=\sqrt{\pi}/2$，$\Gamma(2)=1$ となり，

$$\frac{1}{2}a+b=\frac{1}{2}\log\pi,\quad a+b=\frac{1}{2}\log\pi-\log 2$$

となる．これから

$$a=-2\log 2,\quad b=\frac{1}{2}\log\pi+\log 2$$

がわかり，結局

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)=2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

となり，これはルジャンドルの 2 倍公式とよばれる．

問　題

1. ガウスの公式とよばれる次の式を証明せよ：

$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(z)=n^{z-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{n}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{z+n-1}{n}\right).$$

2. 次の式を示せ：

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)=2^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

3. 極 $z=-n$ での $\Gamma(z)$ の留数はいくらか.

2.5. スターリングの公式　ガンマ関数を用いる多くの場合に，z が大きくなったときの $\Gamma(z)$ の挙動を知っていることが重要である．幸いに，スターリングの公式とよばれる古典的な公式によって，少い労力でかなり精確に $\Gamma(z)$ を評価することができる．この公式の証明法はいろいろある．リンデレーフの留数解析に関する古典的な本に主として従って，われわれは留数計算を用いることにする．これは非常に簡単であり，以前よりは一見して明らかでない場合に留数を用いるので，たいへんに教育的である．

出発点は $\log\Gamma(z)$ の2階微分に関する公式(31)で，部分和

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(z+n)^2}$$

を便利な線積分で表すことが最初の仕事である．このために，整数点 ν で留数 $1/(z+\nu)^2$ をもつ関数が必要である．うまいのは

$$\Phi(\zeta)=\frac{\pi\cot\pi\zeta}{(z+\zeta)^2}$$

である．ここで ζ が変数で，z は助変数として入っていて，はじめの間は $x>0$ として固定した値 $z=x+iy$ にとめておく．

垂直辺が $\xi=0$ と $\xi=n+\dfrac{1}{2}$ の上にあり水平辺が $\eta=\pm Y$ の上にある長方形を考え，そこで留数公式を用い，まず Y を次に n を ∞ にもっていく．この長方形の周を K とかくと，これは原点で極を通るが，積分は主値をとり原点での留数を半分にすれば公式を用いてもよいことがわかっている．ゆえに，

$$\text{pr. v.}\ \frac{1}{2\pi i}\int_K \Phi(\zeta)d\zeta=-\frac{1}{2z^2}+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{(z+\nu)^2}$$

をうる．$Y\to\infty$ のとき，長方形の水平辺の上では一様に $\cot\pi\zeta$ は $\pm i$ に近

づく．$1/(z+\zeta)^2$ は0に近づくので，対応する積分は0に収束する．直線 $\xi=n+\dfrac{1}{2}$ の上では $\cot\pi\zeta$ は有界であり，周期性から n によらない評価をもつ．ゆえに，直線 $\xi=n+\dfrac{1}{2}$ の上の積分は

$$\int_{\xi=n+1/2}\frac{d\eta}{|\zeta+z|^2}$$

の定数倍より小さくなる．この積分は計算できる．積分する直線上では

$$\bar{\zeta}=2n+1-\zeta$$

となり，留数により

$$\frac{1}{i}\int\frac{d\zeta}{|\zeta+z|^2}=\frac{1}{i}\int\frac{d\zeta}{(\zeta+z)(2n+1-\zeta+\bar{z})}=\frac{2\pi}{2n+1+2x}$$

をうる．ゆえに，$n\to\infty$ とすると極限は0である．

次に，虚軸上の $-i\infty$ から $+i\infty$ までの積分の主値は

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty\cot\pi i\eta\left[\frac{1}{(i\eta+z)^2}-\frac{1}{(i\eta-z)^2}\right]d\eta=-\int_0^\infty\coth\pi\eta\cdot\frac{2\eta z}{(\eta^2+z^2)^2}\,d\eta$$

という形でかける．符号をかえて，結局次の式をうる：

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)=\frac{1}{2z^2}+\int_0^\infty\coth\pi\eta\cdot\frac{2\eta z}{(\eta^2+z^2)^2}\,d\eta. \tag{32}$$

ここで，

$$\coth\pi\eta=1+\frac{2}{e^{2\pi\eta}-1}$$

とかきなおすと，1の項からは積分の値 $1/z$ がえられる．ゆえに，(32)は次のようにかきなおせる：

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)=\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\int_0^\infty\frac{4\eta z}{(\eta^2+z^2)^2}\cdot\frac{d\eta}{e^{2\pi\eta}-1}. \tag{33}$$

ここで，この積分は非常に早く収束している．

z が右半平面にあることに限っておけば，この式は積分できる．$\log z$ は主値をとることにし，C を積分定数として

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=C+\log z-\frac{1}{2z}-\int_0^\infty \frac{2\eta}{\eta^2+z^2}\cdot\frac{d\eta}{e^{2\pi\eta}-1} \tag{34}$$

となる．最後の項については少し注意をしておく．(34)の中の積分が，積分記号の下で微分できることを確かめねばならない． 半平面 $x>0$ の任意のコンパクト集合上に z を限ったときに，(33)の積分は一様収束するからこれは正しい．

(34)をもう一度積分したい．こうすると，積分の中に明らかに $\arctan(z/\eta)$ が表れ，一価な枝は定義できるだろうが多価関数を用いることはさけたい．(34)の積分を部分積分することによってこれは可能である．

$$-\int_0^\infty \frac{2\eta}{\eta^2+z^2}\cdot\frac{d\eta}{e^{2\pi\eta}-1}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{z^2-\eta^2}{(\eta^2+z^2)^2}\log(1-e^{-2\pi\eta})d\eta$$

となる．ここで，対数はもちろん実数である．これは z に関し積分することができて，

$$\log\Gamma(z)=C'+Cz+\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{z}{\eta^2+z^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}d\eta \tag{35}$$

をうる．C' は新しい積分定数で，便宜上 $C-1$ を C とかきかえた．この式の意味は，右半平面で $\log\Gamma(z)$ の一価な枝が存在し，その値が右辺で与えられているということである．C' を適当にえらぶと，実数の z に対し実数になるような $\log\Gamma(z)$ の枝をうる．

定数 C と C' をきめることが残っている．このためには，(35) の積分のふるまいを調べねばならない．それを

$$J(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{z}{\eta^2+z^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}d\eta \tag{36}$$

とかく．z を虚軸から離しておけば，$z\to\infty$ のとき $J(z)\to 0$ となることはほとんど明らかである．きちんというために，例えば，z を半平面 $x\geqq c>0$ にかぎっておく．積分を2つに分けて

$$J(z)=\int_0^{|z|/2}+\int_{|z|/2}^\infty=J_1+J_2$$

とかく．最初の積分では，$|\eta^2+z^2|\geqq|z|^2-|z/2|^2=3|z|^2/4$ となり，ゆえに

$$|J_1| \leqq \frac{4}{3\pi|z|}\int_0^\infty \log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}d\eta$$

をうる．第二の積分では $|\eta^2+z^2|=|z-i\eta|\cdot|z+i\eta|>c|z|$ となり

$$|J_2| < \frac{1}{\pi c}\int_{|z|/2}^\infty \log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}d\eta$$

をうる．$\log(1-e^{-2\pi\eta})$ の積分は収束するから，$z\to\infty$ で J_1, J_2 は 0 に収束することがいえる．

C の値は，関数等式 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ または $\log\Gamma(z+1)=\log z+\log\Gamma(z)$ に(35)を代入して求まる．z を正数にかぎれば対数の枝についてはためらわなくてよい．代入により

$$C'+Cz+C+\left(z+\frac{1}{2}\right)\log(z+1)+J(z+1)$$
$$=C'+Cz+\left(z+\frac{1}{2}\right)\log z+J(z)$$

となり，これから

$$C=-\left(z+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{z}\right)+J(z)-J(z+1)$$

をうる．$z\to\infty$ として $C=-1$ がわかる．

次に，$z=\frac{1}{2}+iy$ として，等式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z$ に(35)を適用する．

$$2C'-1+iy\log\left(\frac{1}{2}+iy\right)-iy\log\left(\frac{1}{2}-iy\right)+J\left(\frac{1}{2}+iy\right)+J\left(\frac{1}{2}-iy\right)$$
$$=\log\pi-\log\cosh\pi y$$

が成り立つ．しかし，対数は主値をとることにすると，まだ $2\pi i$ の定数倍を除いて証明されているだけである．しかし，(35)は $\log\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ の実数値をきめるから，$y=0$ に対して上の式はこのままで正しい．ゆえに，すべての y に対しても成り立つ．$y\to\infty$ とすると $J\left(\frac{1}{2}+iy\right)$ と $J\left(\frac{1}{2}-iy\right)$ は0にいくことがわかっている．対数をテイラー級数に展開して

$$iy\log\frac{\frac{1}{2}+iy}{\frac{1}{2}-iy}=iy\left(\pi i+\log\frac{1+\frac{1}{2iy}}{1-\frac{1}{2iy}}\right)=-\pi y+1+\varepsilon_1(y)$$

となり，一方，右辺は

$$\log\cosh\pi y=\pi y-\log 2+\varepsilon_2(y)$$

となり，$\varepsilon_1(y)$, $\varepsilon_2(y)$ は 0 に収束する．これらの考察から，$C'=\dfrac{1}{2}\log 2\pi$ がわかる．これで**スターリングの公式**を

$$\log\Gamma(z)=\frac{1}{2}\log 2\pi-z+\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z+J(z) \tag{37}$$

という形で証明した．これは

$$\Gamma(z)=\sqrt{2\pi}\,z^{z-1/2}e^{-z}e^{J(z)} \tag{38}$$

とかいてもよい．剰余項の表示 (36) は右半平面で成立する．$J(z)$ は半平面 $x\geqq c>0$ において $z\to\infty$ のとき 0 に収束することがわかっている．

$J(z)$ の表示式で，被積分関数を $1/z$ のべきに展開することができ，

$$J(z)=\frac{C_1}{z}+\frac{C_2}{z^3}+\cdots+\frac{C_k}{z^{2k-1}}+J_k(z)$$

とかける．ここで，

$$C_\nu=(-1)^{\nu-1}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\eta^{2\nu-2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}d\eta, \tag{39}$$

$$J_k(z)=\frac{(-1)^k}{z^{2k+1}}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\eta^{2k}}{1+(\eta/z)^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}d\eta$$

である．係数 C_ν はベルヌーイ数(1.3節問 4)と

$$C_\nu=(-1)^{\nu-1}\frac{1}{(2\nu-1)2\nu}B_\nu \tag{40}$$

により結びつく(証明は例えば留数による)．ゆえに，$J(z)$ の展開は

$$J(z)=\frac{B_1}{1\cdot 2}\frac{1}{z}-\frac{B_2}{3\cdot 4}\frac{1}{z^3}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k-1)2k}\frac{1}{z^{2k-1}}+J_k(z) \tag{41}$$

という形になる．これをローラン展開と混乱しないようにしてほしい．関数 $J(z)$ は∞の近傍で定義されておらず，したがってローラン展開はできない．さらに，$k\to\infty$ としたときに(41)からえられる級数は収束しない．いえるこ

とは，kをとめたときに$J_k(z)z^{2k}$が$z\to\infty$のときに0に収束することである（ただし，半平面$x\geqq c>0$において）．このことから，(41)を**漸近展開**という．この展開はkをとめてzを大きくするときには非常に有用であるが，zをとめてkを大きくすることは役に立たない．

スターリングの公式を用いて，右辺の積分が収束する範囲，すなわち$x>0$で

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \tag{42}$$

が証明できる．等しいことが証明されるまで右辺の積分を$F(z)$とかこう．部分積分をして直ちに

$$F(z+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^z dt=z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=zF(z)$$

をうる．ゆえに，$F(z)$は$\Gamma(z)$と同じ関数等式をみたし，$F(z)/\Gamma(z)=F(z+1)/\Gamma(z+1)$がわかる．いいかえると，$F(z)/\Gamma(z)$は周期1をもつ．ついでにいうと，積分表示は半平面だけでしか成立しないが，$F(z)$は全平面で定義できることがこれからわかる．

$F(z)/\Gamma(z)$が定数であることを示すために，平行な帯，例えば$1\leqq x\leqq 2$で$|F/\Gamma|$を評価する．まず(42)から

$$|F(z)|\leqq\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt=F(x)$$

となり，$F(z)$はこの帯で有界である．次に，大きなyに対し$|\Gamma(z)|$を下から評価するためにスターリングの公式を用いよう．(37)から，

$$\log|\Gamma(z)|=\frac{1}{2}\log 2\pi-x+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log|z|-y\arg z+\mathrm{Re}\,J(z)$$

をうる．$-\infty$になるのは$-y\arg z$の項だけで，これは$-\pi|y|/2$と比較できる．ゆえに，$|F/\Gamma|$は$e^{\pi|y|/2}$よりずっと早い速度で大きくなるということはない．

任意の関数に対しては，関数が定数になるためにこれは十分ではないが，

周期1の関数に対しては十分である．実際，F/Γ は $\zeta=e^{2\pi iz}$ を変数とする一価関数で表しうる；$\zeta\neq 0$ なら ζ に整数差だけ異なる z の値が無限個対応するが，F/Γ の値はただ一つ対応する．この関数は $\zeta=0$ と $\zeta=\infty$ に孤立特異点をもち，われわれの評価から $\zeta\to 0$ のときは高々 $|\zeta|^{-1/4}$ の速さで，$\zeta\to\infty$ のときは高々 $|\zeta|^{1/4}$ の速さで大きくなる．これから，両方とも除去可能であることがわかり，F/Γ は定数になってしまう．$F(1)=\Gamma(1)=1$ より，$F(z)=\Gamma(z)$ をうる．

問　題

1. (41)式を証明せよ．

2. 実数 $x>0$ に対し，$0<\theta(x)<1$ があり

$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}\,x^{x-1/2}e^{-x}e^{\theta(x)/12x}$$

となることを証明せよ．

3. (42)から確率積分の計算ができる：

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}x^{-1/2}dx=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

この結果とコーシーの定理を用いて，フレネル積分

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx,\qquad \int_0^\infty \cos(x^2)dx$$

を計算せよ．（答：ともに $\frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$．）

3．整関数

2.3節で，整関数を無限積で表す．特別な場合には基本乗積で表すことを考えた．この節では，無限積表示と関数の増大度との関係を調べる．この問題は最初アダマールにより研究され，彼の有名な素数定理の証明に用いられた．この応用を述べるには紙数が足りないが，アダマールの因数分解定理の基本的な重要性はまったく明らかであろう．

3.1．エンセンの公式　$f(z)$ が解析関数ならば $\log|f(z)|$ は $f(z)$ の零点を除いて調和である．ゆえに，$f(z)$ が $|z|\leqq\rho$ で解析的で零点をもたない

なら

$$\text{(43)} \qquad \log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\rho e^{i\theta})| d\theta$$

が成り立ち，$\log|f(z)|$ はポアソンの公式で表される．

(43)は $f(z)$ が円周 $|z|=\rho$ 上に零点をもってもなお正しい．もっとも簡単な証明は，各零点ごとに $f(z)$ を $z-\rho e^{i\theta_0}$ でわることによる．すると，

$$\log\rho = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\rho e^{i\theta} - \rho e^{i\theta_0}| d\theta$$

または

$$\int_0^{2\pi} \log|e^{i\theta} - e^{i\theta_0}| d\theta = 0$$

を示せば十分である．この積分は明らかに θ_0 にはよらないから

$$\int_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta}| d\theta = 0$$

を示せばよい．これは 4 章5. 3節（4 章 6. 4 節問 5 も参照）で証明した

$$\int_0^{\pi} \log\sin x dx = -\pi\log 2$$

からえられる．

円の内部 $|z|<\rho$ に零点があると(43)はどうなるか調べよう．零点を $a_1, a_2, \cdots, a_n$ とかき，重複零点は重複度だけ並べておくことにし，はじめは $z=0$ は零点でないとする．すると，

$$F(z) = f(z)\prod_{i=1}^{n} \frac{\rho^2 - \bar{a}_i z}{\rho(z-a_i)}$$

はこの円板内に零点をもたず，$|z|=\rho$ 上で $|F(z)|=|f(z)|$ である．したがって，

$$\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\rho e^{i\theta})| d\theta$$

となり，$F(0)$ の値を代入して

(44) $$\log|f(0)| = -\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{\rho}{|a_i|}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\theta})|d\theta$$

をうる．これが**エンセン (Jensen) の公式**である．この重要性は，円周上での絶対値 $|f(z)|$ と零点の絶対値とを関係づけている点にある．

$f(0)=0$ ならば，公式はもう少し複雑になる．$f(z)=cz^h+\cdots$ として(44)を $f(z)(\rho/z)^h$ に適用すると，左辺が $\log|c|+h\log\rho$ にかわる．

ポアソン公式の同様な一般化がある．必要なすべては，普通のポアソン公式を $\log|F(z)|$ に適用することである．$f(z)\neq 0$ として，

(45) $$\log|f(z)| = -\sum_{i=1}^{n}\log\left|\frac{\rho^2-\bar{a}_i z}{\rho(z-a_i)}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\frac{\rho e^{i\theta}+z}{\rho e^{i\theta}-z}\log|f(\rho e^{i\theta})|d\theta$$

がえられる．(45)はしばしば**ポアソン・エンセンの公式**とよばれる．

げんみつにいえば，この証明は $|z|=\rho$ で $f\neq 0$ のときだけ正しい．しかし，(44)は右辺の積分が ρ の連続関数であることを示し，それから(45)の積分も同様に連続であることを推論するのは容易である．したがって，一般の場合には，ρ を極限に近づけて(45)が導かれる．

エンセン，ポアソン・エンセンの公式は整関数論に重要な応用をもつ．

3.2. アダマールの定理　$f(z)$ は整関数としてその零点を a_n とかく．簡単のために $f(0)\neq 0$ と仮定する．$f(z)$ が $g(z)$ を次数 $\leqq h$ の多項式として

(46) $$f(z) = e^{g(z)}\prod_n\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{z/a_n+\frac{1}{2}(z/a_n)^2+\cdots+(1/h)(z/a_n)^h}$$

という形でかけるとして，このような整数 h の最小が整関数 $f(z)$ の種数であった(2.3節)*．このような表示が存在しないときは，種数は無限大である．

$|z|=r$ 上での $|f(z)|$ の最大値を $M(r)$ とかく．整関数 $|f(z)|$ の**位数**を

$$\lambda = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log M(r)}{\log r}$$

で定義する．この定義によると，任意に与えられた $\varepsilon>0$ に対し r が十分大

*) (訳注)．p. 228 問1参照．2.3節の定義を採用し，少し修正して読むことを勧める．

きいかぎり

$$M(r) \leqq e^{r^{\lambda+\varepsilon}} \tag{47}$$

が成り立つような，最小の数が λ である．

種数と位数は密接に関係していて，次の定理が成り立つ：

定理 8. 整関数の種数と位数は，不等式 $h \leqq \lambda \leqq h+1$ をみたす．

まず，$f(z)$ の種数は有限で h と仮定し $\lambda \leqq h+1$ を示す．(46)で $e^{g(z)}$ の位数は明らかに $\leqq h$ である．積の位数は両因数の位数をこえることはできない．ゆえに，基本乗積が位数 $\leqq h+1$ であることを示せば十分である．基本乗積の収束から $\sum_n |a_n|^{-h-1} < \infty$ がいえる；これが本質的な仮定である．

基本乗積を $P(z)$ とかき，その各因数を $E_h(z/a_n)$ とかく．すなわち，

$$E_h(u) = (1-u)e^{u+\frac{1}{2}u^2+\cdots+(1/h)u^h}$$

であり，$E_0(u)=1-u$ とおく．すべての u に対し

$$\log|E_h(u)| \leqq (2h+1)|u|^{h+1} \tag{48}$$

となることを示そう．

$|u|<1$ のとき整級数展開により

$$\log|E_h(u)| \leqq \frac{|u|^{h+1}}{h+1} + \frac{|u|^{h+2}}{h+2} + \cdots \leqq \frac{1}{h+1}\,\frac{|u|^{h+1}}{1-|u|}$$

がわかり，ゆえに次の式をうる：

$$(1-|u|)\log|E_h(u)| \leqq |u|^{h+1}. \tag{49}$$

任意の u と $h \geqq 1$ に対し，

$$\log|E_h(u)| \leqq \log|E_{h-1}(u)| + |u|^h \tag{50}$$

が成り立つことも明らかである．

(48)は帰納法により示される．$h=0$ に対しては，$\log|1-u| \leqq \log(1+|u|) \leqq |u|$ に注意するだけでよい．h を $h-1$ として(48)が成り立つと仮定する．す

なわち，

$$\log|E_{h-1}(u)| \leqq (2h-1)|u|^h \tag{51}$$

を仮定しよう．(50)と(51)から $\log|E_h(u)| \leqq 2h|u|^h$ となり，$|u| \geqq 1$ のときにはこれから(48)がえられる．$|u|<1$ のときには(49)を用いることができ，(50)と(51)を合わせて

$$\log|E_h(u)| \leqq |u|\log|E_{h-1}(u)| + 2|u|^{h+1} \leqq (2h+1)|u|^{h+1}$$

をうる．これで帰納法は完成した．

評価(48)から直ちに

$$\log|P(z)| = \sum_n \log\left|E_h\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leqq (2h+1)|z|^{h+1} \sum_n |a_n|^{-h-1}$$

がえられ，$P(z)$ の位数は高々 $h+1$ であることがわかる．

もう一方の不等式を示すために，$f(z)$ の位数は有限で λ と仮定し，λ 以下の整数で最大のものを h とする．すると $h+1>\lambda$ で，まず $\sum_n |a_n|^{-h-1}$ が収束することを示さねばならない．この証明にエンセンの公式が必要なのである．

$|a_n| \leqq \rho$ をみたす零点 a_n の個数を $\nu(\rho)$ とおく．$\nu(\rho)$ の上からの評価を求めるために，(44)を，ρ を 2ρ にし $|a_n| \geqq \rho$ の $\log(2\rho/|a_n|)$ の項は除いて，適用する．

$$\nu(\rho)\log 2 \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(2\rho e^{i\theta})|d\theta - \log|f(0)| \tag{52}$$

がえられる．(47)をみれば，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\lim_{\rho\to\infty} \nu(\rho)\rho^{-\lambda-\varepsilon}=0$ がわかる．

さて，零点 a_n を $|a_1| \leqq |a_2| \leqq \cdots \leqq |a_n| \leqq \cdots$ と絶対値の順に並べておく．すると，$n \leqq \nu(|a_n|)$ は明らかであり，ある n からさきでは

$$n \leqq \nu(|a_n|) < |a_n|^{\lambda+\varepsilon}$$

が成り立つ．この不等式から，級数 $\sum_n |a_n|^{-h-1}$ は優級数

$$\sum_n n^{-\frac{h+1}{\lambda+\varepsilon}}$$

でおさえられ，$\lambda+\varepsilon<h+1$ に ε をとればこの優級数は収束する．これで，$f(z)$ は $g(z)$ を整関数として(46)の形にかけることが証明できた．

$g(z)$ が次数 $\leqq h$ の多項式になることを示すのが残っている．このために一番簡単なのはポアソン・エンセンの公式を用いることである．等式 (45) の両辺に作用素 $(\partial/\partial x)-i(\partial/\partial y)$ をほどこして

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_1^{\nu(\rho)}(z-a_n)^{-1}+\sum_1^{\nu(\rho)}\bar{a}_n(\rho^2-\bar{a}_n z)^{-1}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}2\rho e^{i\theta}(\rho e^{i\theta}-z)^{-2}\log|f(\rho e^{i\theta})|d\theta$$

となる．これを z に関し h 回微分して

$$(53)\qquad D^{(h)}\frac{f'(z)}{f(z)}=-h!\sum_1^{\nu(\rho)}(a_n-z)^{-h-1}+h!\sum_1^{\nu(\rho)}\bar{a}_n{}^{h+1}(\rho^2-\bar{a}_n z)^{-h-1}$$
$$+(h+1)!\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}2\rho e^{i\theta}(\rho e^{i\theta}-z)^{-h-2}\log|f(\rho e^{i\theta})|d\theta$$

がえられる．

ρ を ∞ にもっていきたい．(53)の中の積分を評価するために，まず

$$\int_0^{2\pi}\rho e^{i\theta}(\rho e^{i\theta}-z)^{-h-2}d\theta=0$$

に注意する．ゆえに，$\log|f|$ から $\log M(\rho)$ を引いても，何もかわらない．$\rho>2|z|$ のとき，(53)の最後の項の絶対値は，$\log(M(\rho)/|f(\rho e^{i\theta})|)\geqq 0$ より

$$(h+1)!2^{h+3}\cdot\rho^{-h-1}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{M(\rho)}{|f(\rho e^{i\theta})|}d\theta$$

以下であることがわかる．しかし，エンセンの公式より

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f|d\theta\geqq\log|f(0)|$$

で，$\lambda<h+1$ より $\rho^{-h-1}\log M(\rho)\to 0$ となる．ゆえに，(53)の中の積分は 0 に収束することがわかる．

(53)の第二項に対して，同様に $\rho>2|z|, |a_n|\leqq\rho$ とすると，各項は絶対値が $(2/\rho)^{h+1}$ より小さく，全体の和の絶対値が $2^{h+1}\nu(\rho)\rho^{-h-1}$ 以下になる．これは $\rho\to\infty$ のときに 0 に収束することをすでに証明した．これで，

$$D^{(h)}\frac{f'(z)}{f(z)}=-h!\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-z)^{-h-1} \tag{54}$$

がいえた.

$f(z)=e^{g(z)}P(z)$ とかくと,

$$g^{(h+1)}(z)=D^{(h)}\frac{f'}{f}-D^{(h)}\frac{P'}{P}$$

である. ワイエルシュトラスの定理により $D^{(h)}(P'/P)$ は各項を項別微分して求められ, ちょうど(54)の右辺がでてくる. したがって, $g^{(h+1)}(z)$ は恒等的に0となり, $g(z)$ は次数 $\leqq h$ の多項式でなければならぬ. これで定理8の証明は終る.

この定理は, 有限位数 λ の整関数の因数分解定理である. λ が整数でなければ, 種数 h, したがって因数分解の形も一意的に定まる. 位数 λ が整数のときは場合がわかれる.

次の印象的な系はアダマールの定理の強力さを示すものである:

系　分数位数の整関数は, 任意の有限の値を無限回とる.

明らかに, 任意の定数 a に対し f と $f-a$ は同じ位数をもつ. したがって, f が無限個の零点をもつことを示せばよい. もし f の零点が有限個ならば, 多項式でわって零点をもたない同じ位数の整関数をうる. 定理より, これは g を多項式として e^g という形の関数になる. e^g の位数は明らかに g の次数で整数である. これは仮定に反し, 系は証明された.

問　題

1. 3.2節のはじめに与えた種数の特徴づけは, 2.3節の定義と文字通りには同じでない. この2つの条件が同値であることを示すのに必要な理由を補なえ.

2. $f(z)$ は種数0で, $f(z)=z^m\prod_n\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$ とする. $g(z)=z^m\prod_n\left(1-\frac{z}{|a_n|}\right)$ と $f(z)$ を比較し, 最大値について $\max_{|z|=r}|f(z)|\leqq\max_{|z|=r}|g(z)|$, 最小値について $\min_{|z|=r}|f(z)|\geqq\min_{|z|=r}|g(z)|$ を示せ.

4. リーマンのゼータ関数

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}$ は，$\sigma_0>1$ を固定したときに，すべての実数 $\sigma \geqq \sigma_0$ に対し一様収束する．この級数は，級数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (s=\sigma+it) \tag{55}$$

の優級数となり，したがって，$\zeta(s)$ は半平面 $\mathrm{Re}\, s>1$ において s の解析関数となる．(1.1節問 2 を参照; この情況のときに，$s=\sigma+it$ とかくのは伝統的である)．

関数 $\zeta(s)$ は，リーマンのゼータ関数とよばれ，複素解析学の整数論への応用において，中心的な役割を果たす．この応用にふれることは，この本としては脇道に入りすぎるだろう．しかし，ゼータ関数の初等的性質を読者に通じさせることはできるし，またそうしたい．

4.1. 積による展開

$\zeta(s)$ の整数論的性質は，素数を小さいものから大きいものへ順に並べた列 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ と $\zeta(s)$ との次の関係の中に備わっている．

定理 9. $\sigma=\mathrm{Re}\, s>1$ に対し，

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n{}^s}\right). \tag{56}$$

定理 6 により，級数 $\sum_{1}^{\infty} |p_n{}^{-s}|=\sum_{1}^{\infty} p_n{}^{-\sigma}$ が $\sigma \geqq \sigma_0>1$ のときに一様収束すれば，右辺の無限積も一様収束する．しかし，この級数は $\sum_{1}^{\infty} n^{-\sigma}$ の部分級数だから，$\sigma \geqq \sigma_0$ での一様収束は明らかである．

$\sigma>1$ と仮定すると，直ちに

$$\zeta(s)(1-2^{-s})=\sum n^{-s}-\sum (2n)^{-s}=\sum m^{-s}$$

がいえ，ここで m はすべての奇数の上を走る．同じ理由によって

$$\zeta(s)(1-2^{-s})(1-3^{-s})=\sum m^{-s}$$

となり，この場合は m は2でも3でもわりきれない整数の上を走る．一般に，

$$(57)\qquad \zeta(s)(1-2^{-s})(1-3^{-s})\cdots(1-p_N{}^{-s})=\sum m^{-s}$$

となり，右辺の和は $2,3,\cdots,p_N$ を素因数としてもたないような整数 m に対して和をとるのである．この和の第1項は1で，第2項は $p_{N+1}{}^{-s}$ である．ゆえに，第1項を除いて他の項はすべて $N\to\infty$ とすると0にいき，

$$\lim_{N\to\infty}\zeta(s)\prod_{n=1}^{N}(1-p_n{}^{-s})=1$$

がいえる．これで定理は証明できた．

素数が無限個存在するということを，疑いのないこととこれまでは認めてきた．ここで上の結果を用いてこれを証明することができる．素数が有限個しか存在しないと仮定して最大の素数を p_N とすると，(57)は

$$\zeta(s)(1-2^{-s})(1-3^{-s})\cdots(1-p_N{}^{-s})=1$$

となり，$\sigma\to1$ のときに $\zeta(\sigma)$ は有限の極限値をもつことになる．これは，$\sum_1^\infty n^{-1}$ が発散することに矛盾する．

4.2. $\zeta(s)$ の全平面への接続　$\sigma>1$ に対し

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$$

が成立する(2.5節(42))．この積分において x を nx におきかえて

$$n^{-s}\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}dx$$

がえられ，n に関して和をとることにより

$$(58)\qquad \zeta(s)\Gamma(s)=\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$$

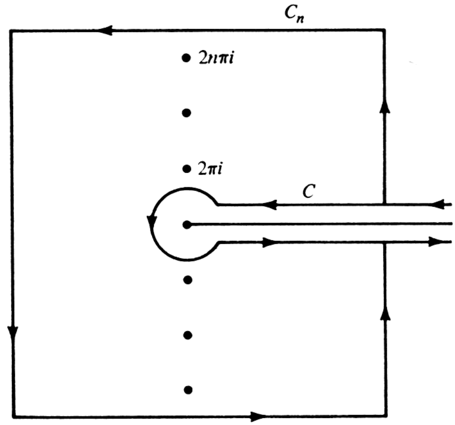


図5-1

をうる，何故なら，$\sigma>1$ より積分はその両端で絶対収束し，積分と無限和の交換は許される．x^{s-1} は $e^{(s-1)\log x}$ としてあいまいさなしに定義される．

図5-1 に示したような，正の実軸に平行で正の実軸に近い直線から始まり別のそのような直線に終る 2 つの道 C, C_n を考える．まず，C だけを考えよう．原点を中心とする円周の半径 r が $<2\pi$ でありさえすれば，その精密な形は必要がない．

定理 10. $\sigma>1$ に対し，正の実軸の補集合において $(-z)^{s-1}$ を $e^{(s-1)\log(-z)}$, $-\pi<\mathrm{Im}\log(-z)<\pi$ と定義すると，

$$\zeta(s)=-\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz \tag{59}$$

が成り立つ．

この積分の収束は明らかである．コーシーの定理により，C が $2\pi i$ の整数倍の点を余分に囲まないかぎり C の形をかえてもかまわない．とくに，r を 0 に収束させてよい．円周上の積分が $r\to 0$ のとき 0 になることはすぐにわかる．極限においては，結局，正の実軸を往復する積分となる．上半平面側では $(-z)^{s-1}=x^{s-1}e^{-(s-1)\pi i}$ となり，下半平面側では $(-z)^{s-1}=x^{s-1}e^{(s-1)\pi i}$ であり，ゆえに，

$$\int_C\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz=-\int_0^\infty\frac{x^{s-1}e^{-(s-1)\pi i}}{e^x-1}dx+\int_0^\infty\frac{x^{s-1}e^{(s-1)\pi i}}{e^x-1}dx$$
$$=2i\sin(s-1)\pi\zeta(s)\Gamma(s)$$

をうる．$\sin(s-1)\pi=-\sin s\pi$ であり，$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\pi/\sin s\pi$（2.4節 (30)）

により，(59)が導かれた．

公式(59)の重要さは次の点にある：右辺は s の任意の値に対し定義でき有理形関数になるので，これを用いて $\zeta(s)$ を全平面の有理形関数に延長できる．実際，(59)式の積分は明らかに s の整関数であり，$\Gamma(1-s)$ は有理形関数で極は $s=1,2,\cdots$ にある．$\zeta(s)$ は $\sigma>1$ において解析的であることがすでにわかっているから，整数 $n\geqq 2$ にある $\Gamma(1-s)$ の極は積分の零点とうち消しあっているはずである．$s=1$ では，たとえば2.4節(29)をみれば，$-\Gamma(1-s)$ は1位の極をもち留数は1である．一方，留数をみれば

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{e^z-1}=1$$

となり，$\zeta(s)$ も留数1をもつ．結果を系としてまとめておこう．

系　ζ 関数は全平面の有理形関数に延長でき，その極は $s=1$ だけで，留数1の1位の極である．

整数 $n\geqq 0$ に対し，$\zeta(-n)$ の値は計算できる．展開式

$$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_1^\infty (-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}z^{2k-1} \tag{60}$$

を用いる(1.3節問4)．(59)より

$$\zeta(-n)=(-1)^n\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{z^{-n-1}}{e^z-1}dz$$

となる．ゆえに，$\zeta(-n)$ は(60)の z^n の係数の $(-1)^n n!$ 倍に等しく，m を正整数として，$\zeta(0)=-1/2, \zeta(-2m)=0, \zeta(-2m+1)=(-1)^m B_m/2m$ がわかる．$-2m$ を ζ 関数の**自明な零点**という．

4.3. 関数等式　半平面 $\sigma>1$ では ζ 関数は具体的に級数(55)で与えられ，したがって $|\zeta(s)|\leqq\zeta(\sigma)$ という評価がある．リーマンは，$\zeta(s)$ と $\zeta(1-s)$ の間にわりに簡単な関係があることを発見した．その結果，半平面 $\sigma<0$ における ζ 関数の挙動もよく調べうる．

関数等式とよくよばれる公式の，標準的な証明をのべよう．

定理11.

(61)
$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

証明には，図5-1の道 C_n を用いる；正方形の部分は，直線 $t=\pm(2n+1)\pi$，$\sigma=\pm(2n+1)\pi$ の上にあるとする．点 $\pm 2m\pi i\ (m=1,\cdots,n)$ のまわりのサイクル C_n-C の回転数は1である．これらの点で，関数 $(-z)^{s-1}/(e^z-1)$ は1位の極をもち，留数は $(\mp 2m\pi i)^{s-1}$ である．ゆえに，

(62)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n-C}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz$$
$$=\sum_{m=1}^{n}[(-2m\pi i)^{s-1}+(2m\pi i)^{s-1}]=2\sum_{m=1}^{n}(2m\pi)^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}$$

をうる．

C_n を $C_n'+C_n''$ と2つにわけ，C_n' は正方形の部分で C_n'' は正方形の外の部分とする．容易にわかるように，C_n' の上では $|e^z-1|$ は n に無関係な正の定数で下から評価され，一方，$|(-z)^{s-1}|$ は $n^{\sigma-1}$ の定数倍で上から評価される．C_n' の弧長は n の定数倍でおさえられるから，ある定数 A によって

$$\left|\int_{C_n'}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz\right|\leqq An^\sigma$$

となることがわかる．$\sigma<0$ とすると，$n\to\infty$ のときに C_n' 上の積分はこれによって0に収束する．C_n'' 上の積分に対しても，このことはもちろん正しい．したがって，C_n-C 上の積分は $-C$ 上の積分に収束し，定理10によって(62)の左辺は $\zeta(s)/\Gamma(1-s)$ に収束する．

$\sigma<0$ とすると級数 $\sum_1^\infty m^{s-1}$ は $\zeta(1-s)$ に収束し，(62)の右辺の極限は $\zeta(1-s)$ の何倍かになる．両者の極限の等しいことから直ちに等式(61)がえられ，$\sigma<0$ をみたす s に対しては証明できたことになる．空でない開集合の上で等しい有理形関数は全体で一致してしまう．ゆえに，(61)はすべての s に対し成り立つ．

関数等式に同値な公式がいくつかある．たとえば，$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\pi/\sin \pi s$ を用いると，(61)から

$$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s) \tag{63}$$

がえられる．また，定理11の内容は次のような形でもいいあらわされる．

系　$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(1-s)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

とおくと，$\xi(s)$ は整関数であり，$\xi(s)=\xi(1-s)$ をみたす．

因数 $1-s$ が $\zeta(s)$ の極を相殺し，$\Gamma(s/2)$ の極は $\zeta(s)$ の自明な零点とうち消しあって，$\xi(s)$ が整関数であることは明らかである．(63)を用いて目的の式 $\xi(s)=\xi(1-s)$ をいいかえると，

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)&=\pi^{(s-1)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)\\&=2^{1-s}\pi^{-(s+1)/2}\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\cos\frac{\pi s}{2}\zeta(s)\end{aligned}$$

となり，これは

$$\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)=2^{s-1}\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

と同じである．関係式

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)=\pi/\cos\frac{\pi s}{2}$$

から，上記の式は

$$\pi^{1/2}\Gamma(s)=2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)$$

に等しく，これはルジャンドルの2倍公式にほかならない(2.4節の終りをみよ)．これで，系は証明できた．

整関数 $\xi(s)$ の位数はどうなるか？ $\xi(s)=\xi(1-s)$ より，$\sigma\geqq\frac{1}{2}$ として $|\xi(s)|$ を評価すれば十分である．スターリングの公式(2.5節(37))から容易に，定

数 A があり大きな $|s|$ に対し $\log|\Gamma(s/2)|\leqq A|s|\log|s|$ が成り立つ．この評価は s の実数値に対しても正しい．ゆえに，$\sigma\geqq\frac{1}{2}$ のときに $|\zeta(s)|$ が相対的に小さいことが示されれば，$\xi(s)$ の位数は 1 であることがいえよう．

よくやるように，x 以下の整数の中で最大のものを $[x]$ と記す．まず，$\sigma>1$ と仮定しよう．次の計算をたしかめることは，そんなに難しくないだろう：

$$\int_N^\infty [x]x^{-s-1}dx=\sum_N^\infty n\int_n^{n+1}x^{-s-1}dx$$

$$=s^{-1}\sum_N^\infty n(n^{-s}-(n+1)^{-s})=s^{-1}\left[N^{-s+1}+\sum_{N+1}^\infty n^{-s}\right].$$

これから次の式をうる：

$$\zeta(s)=\sum_1^N n^{-s}+\frac{1}{s-1}N^{1-s}-s\int_N^\infty(x-[x])x^{-s-1}dx. \tag{64}$$

この式は $\sigma>1$ としてえられたが，右辺の積分は $\sigma>0$ に対し収束し，したがってこの等式は $\sigma>0$ に対し成り立つ．ついでにいうと，(64)は $s=1$ において留数 1 の極をあらわしている．

$\sigma\geqq\frac{1}{2}$ のとき，(64)から

$$|\zeta(s)|\leqq N+AN^{-1/2}|s|$$

という形の評価をうる．この評価は大きな $|s|$ に対し成立し，A は s と N によらない定数である．N を $|s|^{2/3}$ にもっとも近い整数にとると，これから $|\zeta(s)|$ は $|s|^{2/3}$ の定数倍でおさえられることがわかる．ゆえに，この因数は $\xi(s)$ の位数に影響しない．

4.4. ゼータ関数の零点 積に展開した式(56)から，$\zeta(s)$ は半平面 $\sigma>1$ には零点をもたないことがわかる．関数等式を用いるとこれから，半平面 $\sigma<0$ にある零点は自明なものだけであることがいえる．いいかえると，自明でない零点は帯状領域 $0\leqq\sigma\leqq1$ の中にある．有名なリーマン予想は，まだ正しいとも正しくないともわかっていないが，自明でない零点はすべて

直線 $\sigma=\frac{1}{2}$ の上にあるだろうというのである．$\sigma=1$ と $\sigma=0$ の上に零点がないことを示すのはそんなに難しくはない．漸近的に零点の3分の1以上が直線 $\sigma=\frac{1}{2}$ の上にあることがわかっている†．

長方形 $0<\sigma<1, 0\leqq t\leqq T$ の中にある零点の個数を $N(T)$ としよう．読者の参考のために，

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\log T)$$

が成り立つことを証明なしに述べておく．

5．正規族

3章1節で関数を空間の点とみなす考え方を紹介した．点の集合と関数の集合との間には，原理的に差はない．にもかかわらず，はっきり区別をするために関数のときには集合の代りに族ということにしたい．普通には，一つの族に属する関数は同じ集合の上で定義されていると仮定する．

われわれは主として，ある領域で定義された解析関数の族に興味がある．重要な例として，有界な解析関数の族や，同じ値を二度とらない関数の族などがある．そのような族の収束に関する性質を調べるのが目的である．

5.1．同程度連続　解析関数がわれわれのおもな関心事であるが，もっと一般な所から出発する方が得策である．任意の距離空間に値をとる関数の族に対して，基礎的な定理が成立し容易に証明できることがわかる．

基本的な仮定として，複素平面の定まった領域 Ω で定義され距離空間 S に値をとる関数 f の一つの族を $\mathfrak{F}$ としよう．3章1節のときと同じように，S の距離関数を d とかく．

$\mathfrak{F}$ に属する関数の列 $\{f_n\}$ の収束性を問題にしたい．列 $\{f_n\}$ が収束すると期待する特別の理由はない．反対に，収束する部分列を全然もたないとい

†) 1975年に Norman Levinson により証明された．

う逆の極端の方がもっとありそうである．多くの場合に後者の可能性があることは非常に困ったことであり，これからの目的はそれを除外する条件をみつけることである．

距離空間に値をとる関数 f の連続の定義を復習しよう．f が z_0 で連続とは，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在し，$|z-z_0|<\delta$ ならば $d(f(z),f(z_0))<\varepsilon$ となるように，できることである．f が一様連続というのは，z_0 によらない δ がとれることであった．しかし関数の族の場合には，当面の問題に関連した別の一様性がある．すなわち，f によらないで δ をとることができるかどうかである．両者を要求することにして，次の定義をする：

定義 1. 族 $\mathfrak{F}$ が集合 $E\subset\Omega$ で**同程度連続**というのは，任意の $\varepsilon>0$ に対し次の性質をみたす $\delta>0$ が存在することである：$z_0, z\in E$ で $|z-z_0|<\delta$ ならばすべての $f\in\mathfrak{F}$ に対し $d(f(z),f(z_0))<\varepsilon$ が成り立つ．

このように定義すると，同程度連続な族 $\mathfrak{F}$ に属する各 f は E で一様連続になっていることを注意しておく．

収束部分列の問題にもどろう．次の定義は，都合の良い関数族を特徴づけるものである．

定義 2. $\mathfrak{F}$ が Ω で**正規族**であるというのは，任意の関数列 $\{f_n\}, f_n\in\mathfrak{F}$ が，Ω でコンパクト一様収束するような部分列を含むことである*.

この定義は，収束部分列の極限関数が $\mathfrak{F}$ に属するか否かは問題にしていない．

5.2. 正規性とコンパクト

読者は，正規性とボルツァノ・ワイエルシュトラスの性質（3章定理7）との密接な類似に気づいたであろう．それを類似以上のものにするためには，S に値をとる Ω 上の関数の空間に距離

---

*) 〔訳注〕$\{f_n\}$ が Ω で**コンパクト一様収束**（広義一様収束ともいう）するというのは，Ω のすべてのコンパクト部分集合の上で $\{f_n\}$ が一様収束していることである．(189頁参照.) 例：$f_n(z)=1+z+\cdots+z^n+\cdots$ は $\Omega=\{|z|<1\}$ でコンパクト一様収束する（しかし，Ω で一様収束ではない).

を定義し，その距離に関する収束がコンパクト一様収束と一致するようにしなければならない．

このためにまず，コンパクト集合 $E_k \subset \Omega$ の増加列による Ω のエグゾーションが必要になる．この意味は，任意のコンパクト集合 $E \subset \Omega$ に対し $E \subset E_k$ となる E_k が存在することである．その作り方はいろいろある：ここでは特定するために，$E_k=\{z \in \Omega; |z| \leqq k, z$ と境界 $\partial\Omega$ との距離が $\geqq 1/k\}$ としよう．明らかに，各 E_k は有界閉集合で，ゆえにコンパクトである．任意のコンパクト集合 $E \subset \Omega$ は有界であり $\partial\Omega$ からの距離が正である；したがって，ある E_k に含まれる．

f, g を Ω で定義され S に値をもつ2つの関数とする．この関数の間の距離 $\rho(f, g)$ を定義しよう．値の間の距離 $d(f(z), g(z))$ と間違わないようにしてほしい．まず，d を距離関数

$$\delta(a, b)=\frac{d(a, b)}{1+d(a, b)}$$

でおきかえる．これはまた三角不等式をみたし，有界であるという便利さがある(3章1.2節問1,2参照)．次に

$$\delta_k(f, g)=\sup_{z \in E_k} \delta(f(z), g(z))$$

とおく．これは，E_k での f と g の距離を表しているとみてよい．最後に

$$\rho(f, g)=\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \delta_k(f, g) \tag{65}$$

と定義する．$\rho(f, g)$ が有限の数であり，距離関数のすべての条件をみたしていることを確かめるのは容易である(3章1.2節)．

距離 $\rho(f, g)$ は，われわれの要求していた性質をもっている．まず，距離 ρ の意味で $f_n \to f$ と仮定しよう．すると，大きな n に対し $\rho(f_n, f)<\varepsilon$ となり，(65)より $\delta_k(f_n, f)<2^k\varepsilon$ となる．これから，距離 δ_k に関し E_k 上で一様に $f_n \to f$ がわかり，ゆえに距離 d に関しても E_k 上一様収束がいえる．任意のコンパクト集合 E はある E_k に含まれるから，E 上一様収束がわかる．

逆に，任意のコンパクト集合上で f_n が f に一様収束するとしよう．すると各 k に対し $\delta_k(f_n,f)\to 0$ となり，級数 $\sum 2^{-k}\delta_k(f_n,f)$ は n に無関係な項からなる収束優級数をもつから，$\rho(f_n,f)\to 0$ をうる（ワイエルシュトラスの M 判定法のときと同様にせよ）．

距離 ρ に関する収束がコンパクト一様収束と同じであることを示した．ここまで，S が完備とは仮定していない．もし S が完備ならば，S に値をもつ関数全体の集合が ρ を距離とする距離空間として，完備になることが容易に示される．

いま導入した距離は，任意性をもち人工的であるという批判は，いくらか正しい．しかし，ここで証明した事から，開集合は距離の構成の仕方によらない．いいかえると，位相は本来の意味をもち，解析関数論の要求に合うようにできている．

さて，ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理を復習しよう．距離空間がコンパクトになるための必要十分条件は，任意の無限点列が収束する部分列をもつことである．（3章定理7）．距離 ρ の入った族 $\mathfrak{F}$ にこの定理を適用すると，$\mathfrak{F}$ がコンパクトになる必要十分条件は，$\mathfrak{F}$ が正規族で極限関数がまた $\mathfrak{F}$ に入ることであると，結論できる．一方，$\mathfrak{F}$ が正規族ならば，閉包 $\mathfrak{F}^-$ も正規族である．したがって，正規族の特徴づけとして次の定理をうる：

定理 12． $\mathfrak{F}$ が正規族になるための必要十分条件は，距離(65)に関して $\mathfrak{F}$ の閉包 $\mathfrak{F}^-$ がコンパクトになることである．

$\mathfrak{F}^-$ がコンパクトのとき，$\mathfrak{F}$ は**相対コンパクト**であるという．ゆえに，正規族と相対コンパクト族とは同じことになる．

さて，正規族の概念を全有界性に関連づけておこう．$\mathfrak{F}$ が正規族ならば $\mathfrak{F}^-$ はコンパクトであり，3章定理6により $\mathfrak{F}^-$ は全有界になり，$\mathfrak{F}$ もしたがって全有界になる（65頁の脚注をみよ）．この意味は定義により，任意の $\varepsilon>0$ に対し有限個の関数 $f_1,\cdots,f_n\in\mathfrak{F}$ が存在し，任意の $f\in\mathfrak{F}$ はある f_j に対し $\rho(f,f_j)<\varepsilon$ をみたすことである．逆に，$\mathfrak{F}$ が全有界であるとすれば，$\mathfrak{F}^-$ もそうなる．S が完備であれば，$\mathfrak{F}^-$ も完備になりゆえにコンパクトにな

る．すなわち，S が完備距離空間であれば，$\mathfrak{F}$ が正規族ということと全有界ということは同値である．

次の定理は全有界性を補助的な距離 ρ ではなく S のもとの距離で表すものである．

定理 13. $\mathfrak{F}$ が正規族になるための必要十分条件は，任意のコンパクト集合 $E\subset\Omega$ と任意の $\varepsilon>0$ に対し，$f_1,\cdots,f_n\in\mathfrak{F}$ をみつけ，任意の $f\in\mathfrak{F}$ がある f_j に対し E 上で $d(f,f_j)<\varepsilon$ をみたすようにできることである．

$\mathfrak{F}$ が全有界とすると，$f_1,\cdots,f_n$ があり，任意の $f\in\mathfrak{F}$ に対し $\rho(f,f_j)<\varepsilon$ となる f_j がある．(65)より $\delta_k(f,f_j)<2^k\varepsilon$ となり，E_k 上で $\delta(f,f_j)<2^k\varepsilon$ である．k をあらかじめきめておけば，E_k 上で $\delta(f,f_j)$ はいくらでも小さくすることができ，ゆえに $d(f,f_j)$ もそうである．これで条件の必要性がいえた．

十分を示すために，$2^{-k_0}<\varepsilon/2$ に k_0 をとる．仮定より $f_1,\cdots,f_n$ をみつけ，任意の $f\in\mathfrak{F}$ が E_{k_0} 上で不等式 $\delta(f,f_j)\leqq d(f,f_j)<\varepsilon/2k_0$ の一つをみたすようにできる．これから $k\leqq k_0$ のとき $\delta_k(f,f_j)<\varepsilon/2k_0$ となり，一方 $k>k_0$ なら明らかに $\delta_k(f,f_j)<1$ である．(65)から

$$\rho(f,f_j)<k_0(\varepsilon/2k_0)+2^{-k_0-1}+2^{-k_0-2}+\cdots=\varepsilon/2+2^{-k_0}<\varepsilon$$

となり，これが証明したいことであった．

5.3. アルツェラの定理

定義1と定義2の間の関係を調べよう．両者はアルツェラの定理（またはアルツェラ・アスコリの定理）とよばれる有名で非常に有用な定理により結ばれる．

定理 14. 距離空間 S に値をとる連続関数の一つの集合 $\mathfrak{F}$ が複素平面の領域 Ω で正規族になるための必要十分条件は次の二つが成立することである：

(i)　Ω の任意のコンパクト集合 $E\subset\Omega$ の上で $\mathfrak{F}$ は同程度連続である；

(ii)　各 $z\in\Omega$ に対し，集合 $\{f(z);f\in\mathfrak{F}\}$ は S のあるコンパクト集合に含まれる．

(i)の必要性の証明を二つ与える．$\mathfrak{F}$ は正規族とし $f_1, \cdots, f_n$ を定理13のようにとる．これらは E 上で一様連続だから，$\delta>0$ をとり，$z, z_0 \in E, |z-z_0|<\delta$ ならば $d(f_j(z), f_j(z_0))<\varepsilon,\ j=1, \cdots, n$ をみたすようにできる．任意の $f\in\mathfrak{F}$ に対し対応する f_j をとると，

$$d(f(z), f(z_0)) \leqq d(f(z), f_j(z))+d(f_j((z), f_j(z_0))+d(f_j(z_0), f(z_0))<3\varepsilon$$

が成り立ち，(i)が証明できた．

きれいさでは劣るが定理13を用いない証明がある．$\mathfrak{F}$ が E 上で同程度連続でないとすると，$\varepsilon>0$ と点列 $z_n, z_n' \in E$ と関数列 $f_n \in \mathfrak{F}$ を，$|z_n-z_n'|\to 0$ でありすべての n に対し $d(f_n(z_n), f_n(z_n'))\geqq\varepsilon$ をみたすようにとれる．E はコンパクトだから $\{z_n\}, \{z_n'\}$ のある部分列が共通の極限 $z''\in E$ に収束する．$\mathfrak{F}$ は正規族だから $\{f_n\}$ の部分列で E 上一様収束するものがある．この三つの部分列が同じ番号 n_k をもつようにするのは容易である．$\{f_{n_k}\}$ の極限関数 f は E で一様連続である．ゆえに，$d(f_{n_k}(z_{n_k}), f(z_{n_k}))$, $d(f(z_{n_k}), f(z_{n_k}'))$, $d(f(z_{n_k}'), f_{n_k}(z_{n_k}'))$ がいずれも $\varepsilon/3$ より小さくなるように k がとれ，これは $d(f_n(z_n), f_n(z_n'))\geqq\varepsilon$ の仮定に反する．

(ii)の必要性をいうのには，集合 $\{f(z); f\in\mathfrak{F}\}$ の閉包がコンパクトになることを示せばよい．$\{w_n\}$ をこの閉包に属する点列とする．各 w_n に対し $f_n\in\mathfrak{F}$ を $d(f_n(z), w_n)<1/n$ となるようにとる．正規族より収束する部分列 $\{f_{n_k}(z)\}$ があり，点列 $\{w_{n_k}\}$ は同じ極限に収束する．

(i), (ii)の十分性は，有名なカントールの対角線論法により証明される．まず，Ω でいたる所稠密な Ω の点列 ζ_k が存在する．例えば，座標が有理数であるような Ω の点の全体をとり番号をつければよい．$\mathfrak{F}$ の任意の関数列 $\{f_n\}$ をとり，それからすべての ζ_k で収束するような部分列を抜きたい．1点で収束するような部分列をみつけることは条件(ii)からいつでもできる．したがって，番号の列

$$n_{11}<n_{12}<\cdots<n_{1j}<\cdots$$
$$n_{21}<n_{22}<\cdots<n_{2j}<\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{66}$$

$$n_{k1}<n_{k2}<\cdots<n_{kj}<\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

を，各行はその前の行の部分列であり，各 k に対し $\lim_{j\to\infty} f_{n_{kj}}(\zeta_k)$ が存在するように，とることができる．対角線の列 $\{n_{jj}\}$ は増加列であり，(66)の各行の部分列に結局はなっている．ゆえに，$\{f_{n_{jj}}\}$ は $\{f_n\}$ の部分列で，すべての ζ_k で収束している．簡単のために n_{jj} を n_j とかきかえる．

コンパクト集合 $E\subset\Omega$ を考え，$\mathfrak{F}$ は E で同程度連続とする．$\{f_{n_j}\}$ が E で一様収束することを示そう．$\varepsilon>0$ を与え，$\delta>0$ を $z,z'\in E, f\in\mathfrak{F}, |z-z'|<\delta$ ならば $d(f(z),f(z'))<\varepsilon/3$ となるようにとる．E はコンパクトだから，E は有限個の $\delta/2$ 近傍でおおわれる．この各近傍内に ζ_k を一つ選んでおく．i_0 が存在し，$i,j>i_0$ ならば $d(f_{n_i}(\zeta_k),f_{n_j}(\zeta_k))<\varepsilon/3$ がいま選んだ各 ζ_k で成り立つようにできる．各 $z\in E$ に対し，z からの距離が δ 以内にこれらの ζ_k の一つがある；ゆえに，$d(f_{n_i}(z),f_{n_i}(\zeta_k))<\varepsilon/3$, $d(f_{n_j}(z),f_{n_j}(\zeta_k))<\varepsilon/3$ である．この三つの不等式から，$d(f_{n_i}(z),f_{n_j}(z))<\varepsilon$ をうる．すべての値 $f(z)$ はあるコンパクト集合に含まれ，ゆえに S の完備な部分集合に含まれるから，E で $\{f_{n_j}\}$ が一様収束することが，これでいえる．

5.4. 解析関数族　解析関数の値は有限複素平面 $\boldsymbol{C}$ に入っている．解析関数族に今までの考察を適用するために，したがって $S=\boldsymbol{C}$ にとり距離は普通のユークリッド距離とするのが自然である．

$\boldsymbol{C}$ のコンパクト部分集合は有界閉集合である．したがって，アルツェラの定理の条件(ii)は，各 $z\in\Omega$ に対し値 $f(z)$ が有界であることといいかえられる．このとき，評価は z ごとにかわっていてもよい．さて，条件(i)もみたされていると仮定しよう．与えられた $z_0\in\Omega$ に対し，閉円 $|z-z_0|\leqq\rho$ が Ω に含まれるように ρ をとる．すると，関数族 $\mathfrak{F}$ はこの閉円で同程度連続である．同程度連続の定義において $\delta(<\rho)$ が ε に対応するとし，すべての $f\in\mathfrak{F}$ に対し $|f(z_0)|\leqq M$ とすると，$|z-z_0|<\delta$ で $|f(z)|\leqq M+\varepsilon$ が成り立つ．コンパクト集合はこのような近傍の有限個でおおわれるから，任意のコンパクト集合の上で $\mathfrak{F}$ の関数は一様有界になる(もちろん，評価は集合によってかわ

る). アルツェラの定理から複素数値関数の正規族に対してこれは正しい.

解析関数に対しては, これは十分条件にもなる.

定理 15. 解析関数族 $\mathfrak{F}$ が $\boldsymbol{C}$ への関数の族とみて正規族になるのは, 各コンパクト集合上で $\mathfrak{F}$ の関数が一様有界になるときで, またそのときに限る.

十分性を示すには同程度連続をいえばよい. Ω に含まれる半径 r の閉円板の周を C とする. z, z_0 が C の内部に入っておれば, コーシーの積分定理により

$$f(z)-f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z_0}\right)f(\zeta)d\zeta=\frac{z-z_0}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}d\zeta$$

をうる. C 上で $|f|\leqq M$ とし, z, z_0 が半径 $r/2$ の同心の小円板に入っているとすれば,

$$|f(z)-f(z_0)|\leqq\frac{4M|z-z_0|}{r} \tag{67}$$

がわかる. これは, その小円板での同程度連続を示している.

E を Ω のコンパクト部分集合とする. E の各点に, その点を中心とする半径 r の閉円板が Ω に含まれるように r をとる. 半径 $r/4$ の開円板は E の開被覆になる. それから有限個の部分被覆をとることができ, それに属する円の中心, 半径を ζ_k, r_k とし, $|z-\zeta_k|\leqq r_k$ での $\mathfrak{F}$ の関数の絶対値の上界を M_k とする; r_k の最小を r とし, M_k の最大を M とかく. $\varepsilon>0$ に対し, δ を $r/4$, $\varepsilon r/4M$ よりも小さくとる. $|z-z_0|<\delta$, $|z_0-\zeta_k|<r_k/4$ とすると, $|z-\zeta_k|<\delta+r_k/4\leqq r_k/2$ となる. ゆえに (67) を用いて, $|f(z)-f(z_0)|\leqq 4M_k\delta/r_k\leqq 4M\delta/r\leqq\varepsilon$ が成り立ち, これが求めるものである.

定理15にふれるさいに,「$\boldsymbol{C}$ への関数の族とみて」という歴史的根拠のない言葉は省略することが多い. 定理の性質をみたす族は, **局所有界**であるという. 実際, 各点の近傍で有界な族は, 明らかに任意のコンパクト集合の上で有界になる. 定理は, 任意の関数列がつねにコンパクト一様収束する部分列を含むのは, それが局所有界なとき, そのときに限るといっている.

面白いことに, 局所有界性は導関数に遺伝する.

定理 16. 解析関数の局所有界な族は局所有界な導関数をもつ.

これは導関数のコーシーの表示式から直ちにわかる. Ω に含まれる半径 r の閉円板の周を C とすると,

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

となる. ゆえに, 半径 $r/2$ の同心円板の中で $|f'(z)|\leqq 4M/r$ が成り立つ(M は C 上での $|f|$ の最大値). これで, f' が局所有界になることがわかった.

一階の導関数に対し正しいから, 高階の導関数に対してももちろんこのことは成り立つ.

5.5. 古典的な定義

列が ∞ に発散するならば値はそんなに散らばらないので, 正規族を論ずる目的の為にはそのような列は収束するとみなすべきであると主張するのはもっともである. これが古典的な立場で, われわれの定義を伝統的な用法にあうようにやりなおそう.

定義 3. 領域 Ω での解析関数の族が (古典的な意味で) 正規族であるというのは, その族の任意の関数列が, Ω でコンパクト一様収束する部分列を含むか, または Ω でコンパクト一様に ∞ に発散する部分列を含むときである.

この定義は S としてリーマン球面をとったときの定義2と一致していることを示そう. そうすると, とる値として ∞ は許すことができ, それは有理形関数の族を考えてよいことを意味する. 定義2をそのまま用いるのだから, 有理形関数の正規族を包含するように定義を改める必要はない.

しかし, ワイエルシュトラスとフルヴィッツの定理(定理1と定理2)を有理形関数の場合に拡張し次の補題を証明する必要がある.

補題 有理形関数列が球面距離の意味で各コンパクト集合上で一様収束すれば, 極限関数は有理形であるかまたは恒等的に ∞ に等しい.

解析関数列が同じ意味で収束すれば, 極限関数は解析的かまたは恒等的に ∞ に等しい.

補題の意味で $\lim_{n\to\infty} f_n(z)=f(z)$ と仮定する．このとき，$f(z)$ が球面距離に関し連続になることはわかっている．$f(z_0)\neq\infty$ ならば，$f(z)$ は z_0 の近傍で有界になり，大きな n に対してはその近傍で $f_n\neq\infty$ である．普通の形のワイエルシュトラスの定理から，$f(z)$ が z_0 の近傍で解析的になることがわかる．$f(z_0)=\infty$ のときは，逆数 $1/f(z)$ を考えると，これは球面距離の意味で $1/f_n(z)$ の極限になる．ゆえに，$1/f(z)$ は z_0 の近傍で解析的になり，$f(z)$ は有理形になる．f_n が解析的で後者の場合が起ると，フルヴィッツの定理により $1/f$ は恒等的に 0 でなければならず，f は恒等的に ∞ である．

この補題から明らかに，定義 3 は球面距離を用いた定義 2 にほかならないことがわかる．

正規族をなす関数の導関数が正規族をなすということは今度は正しくない．例えば，全平面において関数 $f_n=n(z^2-n)$ の全体を考える．各コンパクト集合上で一様に $f_n\to\infty$ は明らかだからこれは正規族である．$f_n'(z)=2nz$ は $z\neq0$ なら ∞ に発散し，$z=0$ では 0 に収束するから，導関数 f_n' は正規族とはならない．

有理形関数族が正規族になるための必要十分条件は，各コンパクト集合上で同程度連続になることである．アルツェラの定理の条件(ii)は，このときは自動的にみたされるからである．同程度連続性は有界性の条件におきかえられる．実際，次の定理がある．

定理 17．解析関数または有理形関数 f の族が古典的な意味で正規族になるための必要十分条件は，

$$\rho(f)=\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \tag{68}$$

が局所有界になることである†．

$\rho(f)$ の幾何的な意味は多少説明できる．1 章2.4節の公式

$$d(f(z_1),f(z_2))=\frac{2|f(z_1)-f(z_2)|}{\sqrt{(1+|f(z_1)|^2)(1+|f(z_2)|^2)}}$$

†) この定理は F. Marty による．

を用いると，f を立体射影と合成して球面への写像とみたときに曲線 γ の像の長さが $\int_\gamma \rho(f(z))|dz|$ となる． z_1, z_2 を結ぶ線分上で $\rho(f) \leqq M$ とすると，$d(f(z_1), f(z_2)) \leqq M|z_1 - z_2|$ となり，これから $\rho(f)$ が局所有界ならば同程度連続になることが直ちにわかる．

必要条件であることを示すために，まず簡単な計算で $\rho(f) = \rho(1/f)$ がいえることを注意しておく．有理形関数族 $\mathfrak{F}$ が正規族であるがコンパクト集合 E 上で $\rho(f)$ が有界でないと仮定しよう．$f_n \in \mathfrak{F}$ を，E 上での $\rho(f_n)$ の最大値が ∞ にいくようにとる．$\{f_n\}$ の収束部分列 $\{f_{n_k}\}$ の極限関数を f とかく．E の各点中心に閉円板を，Ω に含まれそこで f か $1/f$ は解析的になるようにとる．f が解析的の場合はその閉円板で f は有界になり，球面距離での収束より k を大きくすればその円内に $\{f_{n_k}\}$ は極をもたない．すると，ワイエルシュトラスの定理(定理1)より，少しちぢめた円内で一様に $\rho(f_{n_k}) \to \rho(f)$ がいえる．$\rho(f)$ は連続だから $\rho(f_{n_k})$ はその小さい円で有界になる．$1/f$ が解析的な場合は同じ証明を $\rho(1/f_{n_k})$ に適用すればよく，それは $\rho(f_{n_k})$ に等しい．結局，E はコンパクトだからそのような小円の有限個でおおえて，$\rho(f_{n_k})$ は E 上で有界になり，これは仮定に反する．これで定理は証明された．

問　題

1. 任意の領域で，実部が正である解析関数の族は正規族であることを証明せよ．どのような条件をつけ加えれば，その族は局所有界になるか．ヒント：関数 e^{-f} を考えよ．
2. n を0または自然数とし，関数 z^n の全体を考える．これは，$|z|<1$，または $|z|>1$ においては正規族になるが，単位円周上の点を含むような領域ではそうならないことを示せ．
3. 全平面で解析的な関数を一つ考え $f(z)$ とする．定数 k を動かして，関数 $f(kz)$ の全体を考える．その族が円環 $r_1<|z|<r_2$ で正規族になるのは，f が多項式のとき，そのときだけに限ることを示せ．
4. 解析関数(または有理形関数)の族 $\mathfrak{F}$ が正規族でないならば，一点 z_0 があり z_0 のどのような近傍でも $\mathfrak{F}$ が正規族でない．これを示せ．ヒント：コンパクト性の議論．

第6章　等角写像とディリクレ問題

解析関数論の幾何的な部分において等角写像の問題は決定的な役割を果す．存在と一意性定理により重要な解析関数が解析的表現によることなしに定義できるし，写しあう領域の幾何的性質から写像関数の解析的な性質がわかる．

リーマンの写像定理は単連結領域を単連結領域の上へ写す写像に関するものである．正規族の理論を用いて証明を与えよう．もっと難しい多重連結領域の場合を扱う為に，ラプラス方程式の境界値問題であるディリクレ問題を解かねばならない．

1. リーマンの写像定理

単位円は任意の全平面の単連結真部分領域の上へ等角に写しうることを示す．これはそのような任意の2つの領域を互いに等角に写しうることを示している．何故なら中間に単位円を媒介させればよい．この定理は多角形の領域に適用でき，この場合には写像関数の具体的な形が求まる．

1.1. 定理と証明　リーマンがこの写像定理を定式化したのだけれども，証明にはじめて成功したのはP. ケーベである[†]．ここで行う証明は原証明をもっと簡単にしたものである．

定理1　全平面とは異なる任意の単連結領域 Ω と Ω の任意の点 z_0 に対し，Ω を単位円 $|w|<1$ の上へ1対1に写す解析関数 $f(z)$ で，$f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$ をみたすものが唯一つ存在する．

[†]) 写像定理をそれから導くことのできる関連した定理を，W. F. オスグッドがもっと前に証明したが，当然受けてよい注目を受けなかった．

一意性の証明は容易である．f_1, f_2 をそのような関数とすると，$f_1(f_2^{-1}(w))$ は $|w|<1$ を自分自身の上に1対1に写す写像となる．このような写像は一次変換 S になることがわかっている（4章3.4節問5）．$S(0)=0, S'(0)>0$ より $S(w)=w$ となり，ゆえに $f_1=f_2$ である．

Ω での解析関数が単葉であるというのは，$g(z_1)=g(z_2)$ となるのが $z_1=z_2$ のときだけ，いいかえれば g による写像が1対1になることである．存在を証明するために，次の性質をみたすような関数 g の全体 $\mathcal{F}$ を考える：(i) g は Ω で解析的で単葉である，(ii) Ω で $|g(z)|\leqq 1$，(iii) $g(z_0)=0$，$g'(z_0)>0$．微分係数 $f'(z_0)$ が最大になるような関数 f が $\mathcal{F}$ の中にあることを示そう．証明は3段階に分かれる：(1) $\mathcal{F}$ が空集合でないこと；(2) 微分係数を最大にする f の存在；(3) この f が求めるものであること．

$\mathcal{F}$ が空集合でないことを示す為に，仮定より Ω に入らない点 $a\neq\infty$ が存在することに注意する．Ω は単連結だから，$\sqrt{z-a}$ の一価な枝が Ω で定義できそれを $h(z)$ とかく．$h(z)$ は同じ値を二度とることはないし，符号の反対の値をとることもない．写像 h による Ω の像は小さな円 $|w-h(z_0)|<\rho$ を含み，したがって円 $|w+h(z_0)|<\rho$ とは交わらない．すなわち，各 $z\in\Omega$ に対し $|h(z)+h(z_0)|\geqq\rho$ であり，とくに $2|h(z_0)|\geqq\rho$ である．これで，関数

$$g_0(z)=\frac{\rho}{4}\cdot\frac{|h'(z_0)|}{|h(z_0)|^2}\cdot\frac{h(z_0)}{h'(z_0)}\cdot\frac{h(z)-h(z_0)}{h(z)+h(z_0)}$$

が $\mathcal{F}$ に属することを確かめうる．実際，これは単葉関数 h を一次変換したものだから単葉である．さらに，$g_0(z_0)=0$ で，$g_0'(z_0)=(\rho/8)|h'(z_0)|/|h(z_0)|^2>0$ である．

$$\left|\frac{h(z)-h(z_0)}{h(z)+h(z_0)}\right|=|h(z_0)|\cdot\left|\frac{1}{h(z_0)}-\frac{2}{h(z)+h(z_0)}\right|\leqq\frac{4|h(z_0)|}{\rho}$$

より，Ω で $|g_0(z)|\leqq 1$ が成り立つ．

$g\in\mathcal{F}$ を動かして $g'(z_0)$ の全部を考え，その上限を B とする．ただし，B は $+\infty$ かもしれない．関数列 $g_n\in\mathcal{F}$ を，$g_n'(z_0)\to B$ にとれる．5章定理15から $\mathcal{F}$ は正規族である．ゆえに，解析的な極限関数 f に各コンパクト集合上で一様収束するような部分列 $\{g_{n_k}\}$ が存在する．明らかに，Ω で $|f(z)|\leqq 1$

であり $f(z_0)=0,\ f'(z_0)=B$ である（これで $B<+\infty$ がわかる）．f が単葉であることを示せば $f\in\mathcal{F}$ となり，f は z_0 で最大の微分係数をもつことになる．

まず，$f'(z_0)=B>0$ より f は定数ではない．$z_1\in\Omega$ をとり，関数族 $g_1(z)=g(z)-g(z_1)$，$g\in\mathcal{F}$ を考える．これは $\Omega-\{z_1\}$ ではすべて $\neq 0$ である．フルヴィッツの定理（5章定理2）より，この族の極限関数は恒等的に0かまたは零点をもたない．$f(z)-f(z_1)$ は極限関数で定数関数0ではない．ゆえに，$z\neq z_1$ ならば $f(z)\neq f(z_1)$ となり，z_1 は任意だから f は単葉であることがいえた．

あと残っているのは，この f が $|w|<1$ の任意の値を必らずとることを示すことである．ある w_0, $|w_0|<1$ に対し $f(z)\neq w_0$ となったとしよう．Ω は単連結だから，このとき

$$F(z)=\sqrt{\frac{f(z)-w_0}{1-\overline{w}_0 f(z)}} \tag{1}$$

の一価な枝を Ω で定義することができる．（単連結領域内の閉曲線はすべて0にホモローグである．Ω で $\varphi(z)\neq 0$ ならば $\varphi'(z)/\varphi(z)$ の積分により $\log\varphi(z)$ の一価な枝が定義できる．$\sqrt{\varphi(z)}=\exp\left(\dfrac{1}{2}\log\varphi(z)\right)$ である）．

明らかに，F は単葉で $|F(z)|\leqq 1$ である．z_0 での条件に合わせるために，

$$G(z)=\frac{|F'(z_0)|}{F'(z_0)}\cdot\frac{F(z)-F(z_0)}{1-\overline{F(z_0)}F(z)} \tag{2}$$

を作ると，$G(z_0)=0,\ G'(z_0)>0$ である．簡単な計算により

$$G'(z_0)=\frac{|F'(z_0)|}{1-|F(z_0)|^2}=\frac{1+|w_0|}{2\sqrt{|w_0|}}B>B$$

となる．これは B のとり方に反し，$f(z)$ は $|w|<1$ のすべての値 w をとるということがいえる．これで証明は終わる．

一見すると，計算で $G'(z_0)>f'(z_0)$ がえられたのはまぐれ当りと思われるかもしれない．しかし，そうではなくて，(1)式と(2)式から $f(z)$ は $W=G(z)$ の一価解析関数と表すことができ，それは $|W|<1$ を自分自身の中へ写す．不等式 $|f'(z_0)|<|G'(z_0)|$ は，このときシュヴァルツの補題からえられる．

定理1の純粋に位相的な内容もそれ自身重要である．任意の単連結領域は

円板の上に位相同型に写しうることがわかった.（全平面のときは簡単な写像を具体的に作ることができる.）ゆえに，任意の二つの単連結領域はつねに位相的には同値である.

問　題

1. z_0 が実数で Ω が実軸に関し対称なとき，f が対称性 $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$ をみたすことを一意性から証明せよ.
2. Ω が点 z_0 に関し対称なとき，何が対応する結果か.

1.2. 境界での挙動　$f(z)$ は領域 Ω から領域 Ω' の上への等角写像とする. z が境界に近づくときに何が起るだろうか. 境界挙動が非常に正確に予言できる場合もある. 例えば, Ω と Ω' がジョルダン領域† ならば, f が Ω の閉包から Ω' の閉包の上への位相写像に拡張しうる. しかし，残念ながらこの重要な定理を証明する紙数がない.（証明には相当の準備が必要である).

われわれがここでできて証明しようとしているのは，純粋に位相的な内容のつつましい定理である. まず, z が Ω の境界に近づくという意味をはっきりさせよう. 2つの場合がある：Ω の点列 $\{z_n\}$ を考えるか，曲線 $z(t), 0\leqq t<1$ で $z(t)$ がすべて Ω に入るようなものを考える. その点列または曲線が境界に近づくというのは，Ω の任意の点から z_n または $z(t)$ がずっと先では離れているということである. すなわち，任意の $z\in\Omega$ に対し，$\varepsilon>0$ と n_0 または t_0 が存在し，$n>n_0$ ならば $|z_n-z|\geqq\varepsilon$ となる，または $t>t_0$ ならば $|z(t)-z|\geqq\varepsilon$ となることである.

この状況のときに，中心 z，半径 ε（これは z によってかわってよい）の円は Ω の開被覆を作る. 任意のコンパクト部分集合 $K\subset\Omega$ はこのような円の有限個でおおわれる. 対応する n_0 または t_0 の最大を考えれば, $n>n_0$ または $t>t_0$ のとき，z_n または $z(t)$ は K に属さない. くだいていえば，点列または曲線の尻尾は K の外にでている. 逆も成り立つ. すなわち，任意の $z\in\Omega$ に対し K として z を中心とする閉円板で Ω に含まれるものをとる. その

† ジョルダン閉曲線（3章2.1節）は平面をちょうど二つの領域に分け，一方は有界で他方は非有界である. 有界な領域の方をジョルダン領域という. このことは有名であるが，証明はそれほど易しくない.

閉円板の半径を ρ とすると，$\varepsilon<\rho$ に対してはじめに述べたことが成り立つ.

これだけ準備すると，われわれが証明しようとしている次の定理はほとんど明らかである：

定理 2　f を領域 Ω から領域 Ω' の上への位相写像としよう．このとき，$\{z_n\}$ または $z(t)$ が Ω の境界に近づけば，$\{f(z_n)\}$ または $f(z(t))$ も Ω' の境界に近づく.

実際，K を Ω' のコンパクト集合とする．$f^{-1}(K)$ は Ω のコンパクト集合となり，ε_0（または t_0）があり $n>n_0$ $(t>t_0)$ なら z_n $(z(t))$ は $f^{-1}((K)$ に入らない．このとき，$f(z_n)$ $(f(z(t))$ は K に入らぬ.

この定理は位相的なものであるが，等角写像への応用は非常に興味がある.

1.3. 鏡像の原理の応用　もしもっと多くの情報があればもっと強い結果がえられる．われわれは主として単連結領域に限るので，領域の一方は円としてよい．1.1 節と同じ記号を用いて，$f(z)$ は領域 Ω から単位円の上への等角写像とし $f(z_0)=0$ と規格化する．（微分係数の規格化は問題にならない.）鏡像の原理（4 章定理24）を用いることにより，さらに情報をえよう.

Ω の境界が線分 γ（すなわち，直線の一部分）を含むとしよう．回転等をしても問題に影響はないから，γ は実軸上にあると仮定してよい；γ を区間 $a<x<b$ とする．残りの境界が γ から離れているときだけ，この仮定は意味のある単純化になっている．このために仮定を強めて，γ の各点は $\partial\Omega\cap U=\gamma\cap U$ をみたす近傍 U をもつと仮定する．（$\partial\Omega$ は Ω の境界全体）．このとき，γ を自由境界弧ということにする.

この仮定から，γ の各点は $\partial\Omega$ との共通部分が実軸上の直径であるような円の中心になる．明らかに，この直径でわかれるこの円の半円は Ω に含まれるか Ω と交わらないかのどちらかであり，少くとも一方は Ω に含まれる．もし一方だけが Ω に含まれているときは片側境界点といい，両方が Ω に含まれているときは両側境界点ということにする．γ は連結だから γ の各点はみな同じ種類であり，片側境界弧または両側境界弧という.

定理 3　単連結領域 Ω の境界が線分 γ を片側自由境界弧として含むと仮定する．このとき，関数 $f(z)$ が Ω を単位円の上へ等角写像すると，$f(z)$ は $\Omega\cup\gamma$ で解析的で 1 対 1 な関数に延長できる．γ の像は単位円周上の弧 γ' となる．

両側境界弧に対しても明らかな修正を加えれば同様のことが成り立つ．

証明の為に，$x_0\in\gamma$ を中心に小さい円をとり，Ω に入る半円が $f(z_0)=0$ の z_0 を含まないようにする．すると，$\log f(z)$ の一価な枝がこの半円で定義でき，z が直径に近づけば定理 2 から $|f(z)|$ は 1 に近づくから，$\log f(z)$ の実部は 0 に近づく．鏡像の原理から $\log f(z)$ は円全体に解析的に接続される．したがって，$\log f(z)$，ゆえに $f(z)$ は x_0 で解析的になる．円の重なった所ではこの接続した関数は一致しなければならず，$\Omega\cup\gamma$ での解析関数をうる．

さらに，γ 上で $f'(z)\neq 0$ を注意しよう．実際，$f'(x_0)=0$ とすると $f(x_0)$ は重複値となり，x_0 からでる角が π/n $(n\geqq 2)$ の二つの半径は，なす角が π の 2 曲線に写され，これは明らかに不可能である．仮に上半平面の半円が Ω の中に含まれているとすると，

$$\partial \log |f|/\partial y=-\partial \arg f/\partial x<0$$

が γ 上でいえ，$\arg f$ は同じ方向に一定して動く．これから γ 上で写像が 1 対 1 になることがわかる．

円周上に自由境界弧をもつ領域にも，この定理は一般化できる．容易にわかる修正によって，両側境界弧の場合にも定理は成り立つ．

1.4. 解析曲線　区間 $a<t<b$ で定義された実変数 t の実数値または複素数値関数 $\varphi(t)$ が実解析的であるというのは，この区間の各 t_0 に対しテイラー展開 $\varphi(t)=\varphi(t_0)+\varphi'(t_0)(t-t_0)+\dfrac{1}{2}\varphi''(t_0)(t-t_0)^2+\cdots$ がある区間 $(t_0-\rho, t_0+\rho)$, $\rho>0$ で収束することである．もしこうならば，アーベルの定理によりこの整級数は $|t-t_0|<\rho$ のとき複素変数 t に対しても収束し，この円で解析関数を表す．円の重なった所では実軸上の値が同じだから関数は等しくな

る．ゆえに，区間 (a, b) を含み実軸に関し対称な領域 Δ で $\varphi(t)$ は解析関数として定義される．

この状況のときに，$\varphi(t)$ は解析曲線であるという．$\varphi'(t)\neq 0$ のとき正則であるといい，$\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$ となるのが $t_1=t_2$ のときだけとなっておれば単純曲線であるという．

Ω の境界が正則で単純な解析曲線を含んでおり，それは片側自由境界弧であると仮定しよう．定義は前節にならってすることができるが，長い説明をさけるために，区間 (a, b) に対称な領域 Δ があり t が上半平面の Δ の部分に入っておれば $\varphi(t)\in\Omega$ で，t が下半平面側に入っていれば $\varphi(t)\notin\Omega$ と仮定する．

$f(z)$ が写像関数で $f(z_0)=0$ とし，Δ で $\varphi(t)\neq z_0$ となるように Δ をとっておくと，鏡像の原理から $\log f(\varphi(t))$，したがって $f(\varphi(t))$ が Δ の上半分から下半分へ解析接続される．実数の $t_0\in(a, b)$ に対しては $\varphi'(t_0)\neq 0$ としている．ゆえに，φ は $\varphi(t_0)$ の近傍で解析的な逆関数 φ^{-1} をもち，合成して $f(z)$ もその近傍で解析的になる．

定理 4　Ω の境界が解析的で正則な片側自由境界弧 γ を含むならば，Ω から単位円の上への等角写像は $\Omega\cup\gamma$ に解析的に接続され，γ は単位円周上の弧の上に写る．

最後の文章をもっと正確にし証明を完成させることは読者にまかせる．

2. 多角形の等角写像

Ω が多角形のときには，写像問題はほとんど具体的に解がかける．実際，写像関数を多角形の形状できまる値を助変数として含む式で表すことができる．

2.1. 角での挙動　Ω は多角形，つまり有界な単連結領域でその境界

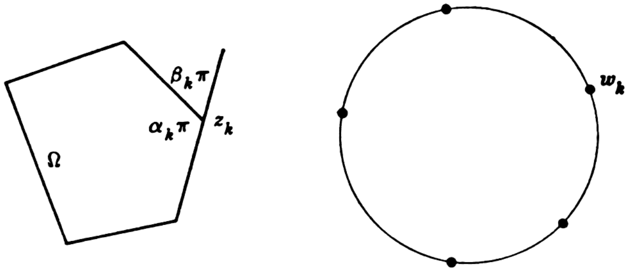


図6-1　多角形の等角写像

は有限個の線分からなる単純閉曲線とする．頂点を正の向きに順にとり，$z_1, \cdots, z_n$ とする．($z_{n+1}=z_1$ とおく)．z_k での角は 0 と 2π の間にとった $\arg(z_{k-1}-z_k)/(z_{k+1}-z_k)$ の値のことである．それを $\alpha_k\pi, 0<\alpha_k<2$ とかく．外角 $\beta_k\pi=(1-\alpha_k)\pi,\ -1<\beta_k<1$ を導入しておくと便利がよい．$\beta_1+\cdots+\beta_n=2$ が成り立つ．多角形が凸であるのは，すべての β_k が正のときである．

定理3により，写像関数 $f(z)$ は多角形の各辺に（すなわち，連続した頂点の間の開線分に）連続に延長され，各辺は単位円周上の弧の上に一対一に写される．これらの円弧が互いに交わらずその間に透きがないことを示したい．

このために，z_k を中心とする小さい円と Ω との共通部分の扇形 S_k を考える．$\zeta=(z-z_k)^{1/\alpha_k}$ の一価な枝は S_k を半円 S'_k の上に写す．$z_k+\zeta^{\alpha_k}$ の適当な枝は Ω に値をもち，S'_k で関数 $g(\zeta)=f(z_k+\zeta^{\alpha_k})$ を考えることができる．定理2により ζ が直径に近づくとき $|g(\zeta)|\to 1$ がわかる．鏡像の原理を用いて $g(\zeta)$ は円全体に解析接続できる．とくにこれから，$z\to z_k$ のとき $f(z)$ は極限 $w_k=e^{i\theta_k}$ をもち，z_k で交わる二つの辺に対応する円弧は共通の端点 w_k をもつことがわかる．z が境界を正の向きにまわるときに $\arg f(z)$ は増加しなければならないから，円弧は少くとも w_k の近傍では重なり合わない．f が原点のまわりの回転数1の曲線の上へ境界を写すことを考えると，すべての円弧が交わらないことが容易にいえる．いいかえると，f は閉包 Ω^- から閉単位円板の上への位相同型写像に延長でき，頂点 z_k は点 w_k に写り，各辺は対応する点の間の円弧に写る(図6-1)．

2.2. シュヴァルツ・クリストッフェルの公式

われわれが求め

る公式は関数 f に対するものでなく，逆関数（F とかく）に対するものである．

定理 5 $|w|<1$ を角 $\alpha_k\pi(k=1, \cdots, n)$ の多角形の上へ等角写像する関数 $z=F(w)$ は

$$F(w)=C\int_0^w \prod_{k=1}^{n}(w-w_k)^{-\beta_k}dw+C' \tag{3}$$

という形である．ここで，$\beta_k=1-\alpha_k$ で，w_k は単位円周上の点，C, C' は複素数の定数である．

2.1 節の後半で考えた関数 $g(\zeta)=f(z_k+\zeta^{\alpha_k})$ は原点で解析的だから，テイラー展開

$$f(z_k+\zeta^{\alpha_k})=w_k+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\zeta^m$$

をもつ．ここで $a_1\neq 0$ である．もしそうでないなら，半円 S'_k の像が単位円に含まれえないからである．ゆえに，この整級数の逆関数を考えることができ，$w=f(z_k+\zeta^{\alpha_k})$ とおくと，

$$\zeta=\sum_{m=1}^{\infty}b_m(w-w_k)^m$$

となり，$b_1\neq 0$ でこの展開は w_k のある近傍で成立している．これを α_k 乗して逆関数 F を用いて表すと

$$F(w)-z_k=(w-w_k)^{\alpha_k}G_k(w)$$

となり，$G_k(w)$ は w_k の近くで解析的で $\neq 0$ である．微分することにより，w_k の近くで $F'(w)(w-w_k)^{\beta_k}$ は解析的で $\neq 0$ であることがいえ，ゆえに，積

$$H(w)=F'(w)\prod_{k=1}^{n}(w-w_k)^{\beta_k} \tag{4}$$

は閉単位円板で解析的で $\neq 0$ となる．

$H(w)$ は実は定数であることを示す．このために，$w=e^{i\theta}$ が単位円周上の $w_k=e^{i\theta_k}$ と $w_{k+1}=e^{i\theta_{k+1}}$ の間にあるときに $H(w)$ の偏角を調べる．$\arg F'(e^{i\theta})$ は $e^{i\theta}$ での単位円周の接線と $F(e^{i\theta})$ でのその像の接線との間の角である；これを簡単な記号で $\arg F'=\arg dF-\arg dw$ とかく．しかし，F は直線を描

くから $\arg dF$ は一定であり，$\arg dw=\theta+\pi/2$ である．$w-w_k$ は $e^{i\theta}-e^{i\theta_k}=2ie^{i(\theta+\theta_k)/2}\times\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_k)$ とかけ，ゆえにその偏角は $\theta/2$ に定数を加えたものである(これは幾何的には明らかである)．(4) の右辺の各因数の偏角を加えて，$\arg H(w)$ は $-\theta+(\sum_1^n\beta_k)\cdot\theta/2=0$ と定数だけ異なることがわかる．ゆえに，$\arg H(w)$ は w_k と w_{k+1} の間で定数で，それは連続だから全単位円周上で定数でなければならない．最大値の原理から $\arg H(w)=\mathrm{Im}\log H(w)$ は単位円の内部で定数となり，したがって $H(w)$ も定数になる．

これで，

$$F'(w)=C\prod_{k=1}^{n}(w-w_k)^{-\beta_k}$$

が証明され，積分することにより公式 (3) をうる．

単位円の一次変換により w_k のうちの三点，例えば w_1, w_2, w_3 は好きな場所にもっていける．$n=3$ のときは，自明な変数変換を除いて写像関数は角だけできまる．これは，二つの三角形が角が同じなら相似であるという事実を反映している．$n>3$ のときは，残りの定数 $w_4, \cdots, w_n$，いいかえると偏角 θ_k は問題の補助パラメーターとよばれる．それらが数値計算によらないで求まるのはまれな場合だけである．

θ_k に任意の値を与えると，(3) の形の関数が単位円周を閉じた折れ線に写すのを見るのは容易である．しかし，その閉じた折れ線が単純になるかどうかはわからない．もしそれが単純になれば，(3) で与えられた $F(w)$ が単位円をその単純な閉じた折れ線で囲まれた領域(＝多角形)の上へ1対1に写すことを示すのは難しくない(正確な証明には偏角の原理を用いる)．

(3)はシュヴァルツ・クリストッフェルの公式とよばれる．同じ公式の別の形として上半平面を多角形の内部へ写すのがある．$\mathrm{Im}\,w>0$ から Ω への写像関数は，

$$F(w)=C\int_0^w\prod_{k=1}^{n-1}(w-\xi_k)^{-\beta_k}dw+C' \tag{5}$$

とかわる．ここで，ξ_k は実数である．最後の指数 β_n はこの公式の表にあらわれていないが，それは $\beta_n=2-(\beta_1+\cdots+\beta_{n-1})$ によってきまり，ほかの

β_i と同様に $-1<\beta_n<1$ をみたさねばならない．そのとき，積分(5)は $w=\infty$ に対しても収束し，無限遠点が角 $\alpha_n\pi$, $\alpha_n=1-\beta_n$ の頂点に対応する．もし $\beta_n=0$ ならばその頂点は見かけだけで，多角形は $(n-1)$ 角形になってしまう．

問　題

1. (3) において β_k は -1 になってもよいことを示せ．それは幾何的にはどんな意味か．
2. 多角形の頂点が ∞ になることを許すとすると，公式にどんな修正が必要か．この頂点で $\beta_k=1$ とすると，多角形はどんな形か．
3. 円を平行な帯，または二つの直角で切られた平行な帯の半分の上へ写す等角写像は，シュヴァルツ・クリストッフェルの公式の特別な場合としてえられることを示せ．
4. 公式(5)を，直接かまたは(3)を用いて導け．
5. $$F(w)=\int_0^w (1-w^n)^{-2/n}dw$$
   は，$|w|<1$ を正 n 角形の内部の上へ写すことを示せ．
6. 上半平面を領域 $\Omega=\{z=x+iy;\ x>0,\ y>0,\ \min(x,y)<1\}$ の上に写す等角写像を求めよ．

2.3. 長方形の写像

Ω が長方形のとき，(5) において $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=\rho>1$ としてよい．写像関数は

$$F(w)=\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{w(w-1)(w-\rho)}}$$

となり，これは**楕円積分**とよばれる．あいまいさをなくすために，$\sqrt{w}$, $\sqrt{w-1}$, $\sqrt{w-\rho}$ の値はすべて第1象限に入るようにきめる．この写像をくわしく調べるために，w を実軸上動かせて $F(w)$ をおってみる．w が実数のときは，平方根は正数かまたは虚部が正の純虚数である (平方根が0になる点を除いて)．$0<w<1$ のときは一つが実数で二つが虚数になる．したがって，$F(w)$ は0から $-K$ まで減少する．ここで，

$$K=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(\rho-t)}} \tag{6}$$

である．$1<w<\rho$ のときは一つだけが虚数の平方根である．ゆえに，1から

w までの積分は負の虚部の純虚数である．$F(w)$ は垂直な線分上を $-K$ から $-K-iK'$ までいき，

$$K'=\int_1^\rho \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(\rho-t)}}$$

である．$w>\rho$ のときは，被積分関数は正となり，$F(w)$ は水平な線分上を正の方向へ動く．どこまでそれは行くか？像は長方形になるはずだから，$-iK'$ で終らねばならないが，直接にそれを確かめてみたい．一つの方法はその線分の長さを，積分

$$\int_\rho^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-\rho)}}$$

で表し，変数変換 $t=(\rho-u)/(1-u)$ によってこの積分を (6) に変換することである．しかし，もっと易しいのは，コーシーの定理から

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-\rho)}}=0$$

を見ることである．これは半径 R の半円周上の積分が $R\to\infty$ のときに 0 に収束することからえられる．この積分の実部が 0 より，二つの水平な線分の長さが等しいことがいえる．虚部が 0 より，$-\infty<w<0$ は $-iK'$ から 0 までの線分上に写ることがわかる．これで長方形ができた．

公式を長方形の対称性が反映するようにしておきたいことがある．頂点を，±1, $\pm1/k$ に対応するようにしよう $(0<k<1)$．定数の係数は問題にならないから，写像関数を

$$F(w)=\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} \tag{7}$$

にとる．今度は $\sqrt{1-w^2}$ と $\sqrt{1-k^2w^2}$ は実部正にきめる．長方形の頂点は $-\frac{K}{2}$, $\frac{K}{2}$, $\frac{K}{2}+iK'$, $-\frac{K}{2}+iK'$ となることがわかり，K, K' は次式で与えられる：

$$K=\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$K'=\int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}.$$

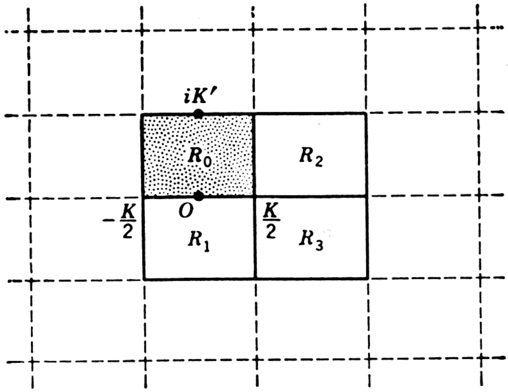


図 6-2

上半平面の像は図 6-2 の影をつけた長方形 R_0 である. F の逆関数を $w=f(z)$ とかく；それは R_0 で定義され，閉長方形から閉上半平面(リーマン球面の位相で)の上へ 1 対 1 連続写像に延長できる. $z=iK'$ が∞に対応する.

鏡像の原理により隣りの長方形 R_1, R_2 に f を解析接続することができる. つまり，$z\in R_1$ に対しては $f(z)=\overline{f(\bar{z})}$ とおき，$z\in R_2$ に対しては $f(z)=\overline{f(K-\bar{z})}$ とおく. 同様にして，R_1 または R_2 から R_3 へ解析接続できる；どちらからしても等しくて $f(z)=f(K-z)$ で与えられる. このように鏡像で次々と接続することができて，結局 $f(z)$ は全平面の有理形関数として定義できる. 接続された関数は $f(z+2K)=f(z)$, $f(z+2iK)=f(z)$ をみたすので，この周期性によって接続した方がもっと便利だったかもしれない.

楕円積分(7)の逆関数は周期 $2K, 2iK'$ をもつ全平面での有理形関数になることがわかった. このような関数は**楕円関数**とよばれる. 楕円積分と楕円関数の関係を発見したのはガウスであるが，彼は発表しなかった. 再発見をしたのがアーベルとヤコビである.

問　題

1. 公式(7)で $F(\infty)=iK'$ となることを証明せよ.
2. $K=K'$ になるのは $k=(\sqrt{2}-1)^2$ のとき，そのときだけである.
3. $f(z), f(z+K), f(z+iK')$ は z の奇関数であるが，$f(z+K/2), (z+K/2+iK')$ は偶関数であることを示せ.

2.4. シュヴァルツの三角形関数　上半平面を角 $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \alpha_3\pi$ の三角形に写す写像は

$$F(w)=\int_0^w w^{\alpha_1-1}(w-1)^{\alpha_2-1}dw$$

である．すでに注意したようにこのときは補助パラメーターを含まない．

逆関数 $f(z)$ はまた，隣りの三角形に鏡像により辺をこえて解析接続される．この方法がとくに興味があるのは，長方形のときのように，全平面での有理形関数がえられるときである．そのためには必要条件として，一つの頂点をとめてその頂点を端点とする辺に関する鏡像をくり返すときに何回かでもとの三角形にもどらねばならない．いいかえると，角が自然数を分母にもつ $\pi/n_1, \pi/n_2, \pi/n_3$ でなければならぬ．簡単な理由で，条件

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=1$$

をみたすのは，(3, 3, 3)，(2, 4, 4)，(2, 3, 6) のときだけである．これは，正三角形，直角二等辺三角形，正三角形の半分となっている．

この各々の場合に，この三角形を鏡像で折り返していったときに，その像の三角形は平面を重なり合わず透き間もなくうめつくすことは容易にわかる．これから写像関数が全平面の有理形関数に延長できることがわかり，シュヴァルツの三角形関数とよばれている．

三つの場合の各々について，三角形の網の目を書いてみるように読者にすすめる．そうすると各三角形関数は比が実数でない二つの周期をもつことがわかり，三角形関数は楕円関数であることがわかる．練習として，その周期によって張られる平行四辺形が何個の三角形からなるか数えてみるとよい．

3. 調和関数をもっと精密に見る

調和関数の基本的な性質は4章6節で議論した．そこではいささか未熟な定義を用いる，つまり二階導関数がすべて連続であることを要求するのが適当であった．これは，平均値の性質を証明しそれからポアソン表示と鏡像の

原理を導くのに十分であった．ここでは，ラプラスの方程式を出発点にするよりは平均値の性質を出発点にする方がもっと満足な理論がえられることを示す．

これに関連して，ハルナックの原理とよばれる調和関数の単調列に関する重要な定理を導く．

3.1. 平均値の性質をもつ関数　$u(z)$ を領域 Ω での実数値連続関数とする．u が平均値の性質をもつというのは，円板 $|z-z_0|\leqq r$ が Ω に含まれれば

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})d\theta \tag{8}$$

が成立することである．4章で平均値の性質から最大値の原理が導かれることを示した．実際，証明をくわしく見れば，十分小さい r, $r<r_0$ に対して(8)が成立すれば十分で，r_0 は z_0 によってかわってもかまわない．結論をくり返しておく：この平均値の性質をもつ連続関数は定数でなければ極大値（または極小値）をとりえない．

前に調和関数は平均値の性質をもつことを示したが，ここではその逆を示す：

定理 6　条件 (8) をみたす連続関数は調和関数である．

またここでも十分小さい r に対してだけ条件が成立すればよい．u が (8) をみたせば，u と調和関数との差もまたその条件をみたす．円 $|z-z_0|\leqq\rho$ が u の定義域 Ω に含まれているとしよう．ポアソンの公式(4章6.3節)を用いて $|z-z_0|\leqq\rho$ で連続で $|z-z_0|<\rho$ では調和，$|z-z_0|=\rho$ 上では u と一致するような関数 $v(z)$ を作ることができる．$u-v$ に最大値・最小値原理を適用するとこの円板全体で $u=v$ となり，ゆえに u は調和になる．

定理 6 により，調和関数を平均値の性質をもつ連続関数として定義することができる．このような関数は自動的に何回でも微分ができすべての高階偏導関数は連続で，ラプラスの方程式をみたす．

同様の理由から，条件 (8) ではないもとの定義で，仮定をある程度ゆるめることができる．$u(z)$ が連続で，偏導関数 $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2 u/\partial y^2$ をもち $\triangle u=0$ をみたすと仮定しよう．上と同じ記号を用いて，$\varepsilon>0$ に対し関数

$$V=u-v+\varepsilon(x-x_0)^2$$

は最大値の原理にしたがわねばならぬ．実際，V が最大値をもつと微分法の定理からその点で $\partial^2 V/\partial x^2 \leqq 0$, $\partial^2 V/\partial y^2 \leqq 0$ となり $\Delta V \leqq 0$ となる．一方

$$\Delta V=\Delta u-\Delta v+2\varepsilon=2\varepsilon>0$$

となる．この矛盾から最大値の原理をうる．ゆえに，円 $|z-z_0|\leqq\rho$ において $u-v+\varepsilon(x-x_0)^2\leqq\varepsilon\rho^2$ がえられる．$\varepsilon\to 0$ として $u\leqq v$ がえられ，逆向きの不等号も同様にして確かめられる．ゆえに $u=v$ で u は調和である[†]．

3.2. ハルナックの原理　ポアソンの公式 (4章6.3節)により調和関数を円周上の値によって表すことができる．この節の目的に適当なのは，

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r^2}{|\rho e^{i\theta}-z|^2}u(\rho e^{i\theta})d\theta \tag{9}$$

という形である．ここで，u は $|z|\leqq\rho$ で調和(または，$|z|<\rho$ で調和，$|z|\leqq\rho$ で連続)とし，$|z|=r<\rho$ である．不等式

$$\frac{\rho-r}{\rho+r}\leqq\frac{\rho^2-r^2}{|\rho e^{i\theta}-z^2|}\leqq\frac{\rho+r}{\rho-r} \tag{10}$$

は容易にえられるが，この後半を用いると(9)より

$$|u(z)|\leqq\frac{1}{2\pi}\frac{\rho+r}{\rho-r}\int_0^{2\pi}|u(\rho e^{i\theta})|d\theta$$

をうる．$u(\rho e^{i\theta})\geqq 0$ と仮定すると，(10) の前半の不等式も用いることができ，

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\rho-r}{\rho+r}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})d\theta\leqq u(z)\leqq\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\rho+r}{\rho-r}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})d\theta$$

が成り立つ．しかし，$u(\rho e^{i\theta})$ の算術平均は $u(0)$ だから，結局，次の上下からの評価式をうる：

---

†) この証明は，C. カラテオドリによる．

$$\frac{\rho-r}{\rho+r}u(0)\leqq u(z)\leqq\frac{\rho+r}{\rho-r}u(0). \tag{11}$$

これが**ハルナックの不等式**である；これは正の調和関数に対してだけ成立することを強調しておく.

(11)の主な応用は，正の調和関数の級数，または同じことであるが調和関数の単調増加列に対してである．**ハルナックの原理**とよばれる簡単であり強力な定理がえられる：

定理 7　関数列 $u_n(z)$ があり，各 $u_n(z)$ は領域 Ω_n で定義され調和とする. Ω は領域で，Ω の各点は次のような近傍 U をもつと仮定する：U は有限個の例外を除きすべての n に対し Ω_n に含まれ，ある番号から先の n に対して U で $u_n(z)\leqq u_{n+1}(z)$ が成り立つ．このとき，$u_n(z)$ は Ω の各コンパクト集合上で一様に$+\infty$に行くか，または，Ω での調和関数 $u(z)$ にコンパクト一様収束する.

一番単純な状況は，$u_n(z)$ がすべて Ω で調和で単調増加列となっている場合である．しかし，応用するときにこれでは困ることがある.

証明のために，まず一点 $z_0\in\Omega$ で $\lim_{n\to\infty}u_n(z_0)=+\infty$ と仮定しよう．仮定から r と m をとり，$n\geqq m$ のとき $u_n(z)$ は $|z-z_0|<r$ で調和で単調増加としてよい．非負の関数 u_n-u_m に (11) の左側の不等式を用いて，$|z-z_0|\leqq r/2$ で一様に $u_n(z)$ が$+\infty$に行くことがわかる．一方，$\lim_{n\to\infty}u_n(z)<\infty$とすると，(11) の右側の不等式から同様にして，$u_n(z)$ は $|z-z_0|\leqq r/2$ で有界になる．したがって，$\lim u_n(z)$ が有限である点の集合と∞である点の集合はそれぞれ開集合であり，Ω は連結だからそのどちらかは空集合になってしまう．極限が一点で∞であれば，ゆえにすべての点で極限は∞になる．一様性は，よく行うコンパクト集合を上記のような有限個の円でおおう議論により示される.

極限関数 $u(z)$ がいたる所有限である場合を考えよう．上と同じ記号を用いて，$|z-z_0|\leqq r/2$, $n+p\geqq n\geqq m$ のとき，$u_{n+p}(z)-u_n(z)\leqq 3(u_{n+p}(z_0)-u_n(z_0))$ となる．ゆえに，一点 z_0 での収束から z_0 の近傍での一様収束がいえ，ハイネ・ボレルの性質から任意のコンパクト集合上での一様収束がいえる．極限

関数の調和性は，$u(z)$ がポアソン積分で表示できることからわかる．

問　題

1. E を領域 Ω のコンパクト部分集合とするとき，E と Ω だけできまる定数 M があり，Ω で調和で正の関数 $u(z)$ と任意の点 $z_1, z_2 \in E$ に対し，$u(z_2) \leqq Mu(z_1)$ が成り立つようにできることを示せ．

4．ディリクレ問題

調和関数論におけるもっとも重要な問題は，与えられた境界値をとる調和関数をみつけることである；それはディリクレ問題とよばれる．円のときには，ポアソンの公式がこの問題の解を与えるが，一般の領域のときにはもっと困難が多い．この問題を解くいろいろな方法があるが，初等的教科書においては劣調和関数を用いる O. ペロンの方法がもっとも簡単で適当である．

4.1．劣調和関数　1次元のラプラス方程式といえば $d^2u/dx^2=0$ という形になるだろう．したがって，1変数の調和関数とは1次関数 $u=ax+b$ と思ってよい．関数 $v(x)$ が凸であるというのは，任意の区間に対しその区間の両端で $v(x)$ と同じ値をもつ一次関数を $u(x)$ とすると，その区間内で $v(x) \leqq u(x)$ が成立することである．

この状況を2次元のときに一般化すると，劣調和関数が定義できる．一次関数を調和関数に，区間を領域に，区間の両端を領域の境界におきかえればよい．つまり，1複素変数，または2実変数の関数 $v(z)$ が劣調和であるというのは，任意の領域に対し境界上で $v(z)$ と同じ値をとる調和関数 $u(z)$ をとると，その領域内で $v(z) \leqq u(z)$ が成り立つことである．われわれはディリクレ問題を目的にしているので，条件を強めて境界上で $v(z) \leqq u(z)$ なら領域内で $v(z) \leqq u(z)$ がいえるという形にしたい．

同じことであるが少し簡単にして次のように定義しよう：

定義1　領域 Ω で定義され連続な実数値関数 $v(z)$ を考える．$v(z)$ が Ω で

劣調和であるとは，任意の部分領域 $\Omega' \subset \Omega$ と Ω' での任意の調和関数 $u(z)$ に対し，$v-u$ が Ω' で最大値の原理をみたすことである．

最大値の原理の意味は，$v-u$ が Ω' で最大値をとれば $v-u$ は定数関数になってしまうことである．特に，v 自身も Ω で最大値をとりえない．この定義は局所的性格をもっている；v が Ω の各点の近傍で劣調和ならば v は Ω で劣調和である．これは重要な注意であり，証明は明らかである．関数が点 z_0 で劣調和であるというのは，z_0 のある近傍で劣調和になるときとする．ゆえに，領域 Ω で劣調和である必要十分条件は，Ω の各点で劣調和になることである．

調和関数は明らかに劣調和である．

劣調和の一つの十分条件は，v のラプラシアンが正となることである．実際，$v-u$ が最大値をもてば，微分法の定理から2階の微分係数の在在を仮定すると，その点で $\partial^2(v-u)/\partial x^2 \leqq 0$, $\partial^2(v-u)/\partial y^2 \leqq 0$ となり，$\Delta v = \Delta(v-u) \leqq 0$ となる．この条件は必要条件ではなく，実際，偏微分可能でない劣調和関数も存在する．もし関数 $v(z)$ が連続な2階偏導関数をもつならば，劣調和であるために $\Delta v \geqq 0$ が必要十分条件である．われわれはこのことを必要としないので，証明は問題にまわす．この条件は，与えられた x, y の関数が劣調和であるかどうかを確かめる簡単な方法といえる．

調和関数の平均値の性質を一般化した不等式により，劣調和関数を特徴づけることができる：

定理 8　連続関数 $v(z)$ が Ω で劣調和になるための必要十分条件は，Ω に含まれる任意の円 $|z-z_0| \leqq r$ に対し，不等式

$$v(z_0) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta})d\theta \tag{12}$$

が成り立つことである．

十分性は，v が定数でなければ最大値をとりえないということを示すには，平均値の性質でなくて (12) があれば十分であることからわかる．$v-u$ も (12) と同様の不等式をみたすから，v が劣調和であることがいえる．

必要性を証明するために，円周 $|z-z_0|=r$ 上に v をおいてポアソン積分 $P_v(z)$ を $|z-z_0|<r$ で作る．v は劣調和だから，$v-P_v$ は定数かまたは最大値をこの円内でとらない．シュヴァルツの定理(4章定理23)により，z が境界点に近づけば $v-P_v$ は0に近づき，ゆえに $v-P_v$ は閉円板で最大値をもつ．最大値が正であるとすると，それは内の内点でとらねばならず，関数は定数でなくなってしまう．この矛盾から，$v\leqq P_v$ がいえる．$z=z_0$ とすると，$v(z_0)\leqq P_v(z_0)$ となり，これは不等式(12)である．

ここで，劣調和関数の基本的な性質を書きあげておこう：

1. v が劣調和なら，定数 $k\geqq 0$ に対し kv も劣調和である．

2. v_1, v_2 が劣調和なら，v_1+v_2 も劣調和である．

この二つは定理8からすぐにいえる．次の性質はもとの定義からの方が見易いであろう．

3. v_1, v_2 が Ω で劣調和ならば，$v=\max(v_1, v_2)$ も Ω で劣調和である．

記号の意味は，各点 z で，$v(z)$ は $v_1(z)$ と $v_2(z)$ の大きい方の値に等しいということである．v の連続性は明らかである．u を Ω' での調和関数とし，$v-u$ が $z_0\in\Omega'$ で最大値をとったとしよう．$v(z_0)=v_1(z_0)$ と仮定する．すると，$z\in\Omega'$ に対し

$$v_1(z)-u(z)\leqq v(z)-u(z)\leqq v(z_0)-u(z_0)=v_1(z_0)-u(z_0)$$

となる．ゆえに，v_1-u は定数となり，同じ不等式から $v-u$ も定数になってしまう．したがって，v が劣調和であることがいえた．

$\varDelta$ は円で，その閉包が Ω に含まれるとし，円周上に v を与えて作られたポアソン積分を P_v とかく．このとき，次のことが成り立つ．

4. v が劣調和のとき，関数 v' を，$\varDelta$ では P_v, $\varDelta$ の外ではもとの v として定義する．v' はまた Ω で劣調和になる．

v' の連続性はシュヴァルツの定理からわかる．$\varDelta$ において $v\leqq P_v$ はすでに証明したから，Ω 全体で $v\leqq v'$ である．$\varDelta$ の内点と外点では明らかに v' は劣調和である．$v'-u$ が $\varDelta$ の境界上の点 z_0 で最大値をとったと仮定しよう．すると $v-u$ も z_0 で最大値をとることがわかる．ゆえに，$v-u$ は定数にな

り，不等式

$$v-u \leqq v'-u \leqq v'(z_0)-u(z_0)=v(z_0)-u(z_0)$$

から $v'-u$ も定数になる．これから，v' の劣調和がわかる．

注意　われわれは連続な劣調和関数だけを考えてきたが，普通に行なわれている劣調和関数の定義は連続性を弱めて，関数は**上半連続**であることだけを要求する．実数値関数 $v(z)$ が点 z_0 で上半連続とは，$\overline{\lim_{z\to z_0}}\, v(z) \leqq v(z_0)$ が成立することで，下半連続とは $\underline{\lim_{z\to z_0}}\, v(z) \geqq v(z_0)$ が成立することである．どちらがどちらかわからなくなったときは，2 重不等式 $v(z_0)-\varepsilon<v(z)<v(z_0)+\varepsilon$ の上半分が成り立つのが上半連続，下半分が成り立つのが下半連続とおぼえておくとよい．上半連続関数には値 $-\infty$ をとることを許し，下半連続関数には値 $+\infty$ をとることを許すのが習慣である．

ほかの所は，定義 1 はそのままでよい．上半連続関数もコンパクト集合の上では最大値をとるので（問 6 参照），最大値の原理は連続関数のときと同様に上半連続関数に対しても意味がある．

また，v が上半連続だけのときにも(12)の積分が意味をもち定理 8 が成立することを示しうる．

問　題

1. 関数 $|x|, |z|^\alpha$ $(\alpha \geqq 0)$, $\log(1+|z|^2)$ は，劣調和であることを示せ．
2. $f(z)$ が解析的ならば，$|f(z)|^\alpha$ $(\alpha \geqq 0)$, $\log(1+|f(z)|^2)$ は劣調和であることを示せ．
3. $v(z)$ は 2 階まで連続な偏導関数をもつと仮定する．このとき，v が劣調和になるための必要十分条件は $\Delta v \geqq 0$ であることを証明せよ．ヒント：十分をいうためには，まず，$\varepsilon>0$ に対し $v+\varepsilon x^2$ が劣調和であることを証明する．必要性には，$\Delta v<0$ ならば円周上の平均値が半径の減少関数になることを示す．
4. $v(w)$ が w の劣調和関数，$w=f(z)$ が z の解析関数ならば，$v(f(z))$ は z の劣調和関数であることを示せ．
5. 劣調和関数の一様収束極限がまた劣調和になるという趣旨の定理を定式化し証明せよ．
6. $v(z)$ は開集合 Ω で上半連続とするとき，任意のコンパクト部分集合 $E\subset\Omega$ の上で v は最大値をとることを示せ．

4.2. ディリクレ問題の解　ディリクレ問題の研究にはじめて劣調和関数を用いたのは O. ペロンであった．彼の方法は非常に一般的であり，ま

ったく初等的である．

有界領域 Ω を考え，その境界 Γ 上で定義された実数値関数 $f(\zeta)$ を考える．(はっきりさせるために，境界上の点を ζ とかくことにする)．最初は $f(\zeta)$ は連続であるとは仮定しない．しかし簡単のために，有界であり $|f(\zeta)|\leqq M$ と仮定する．各 f に対し，次に説明する方法で Ω での調和関数 $u(z)$ を作る．もし，f が連続で Ω が一寸した条件をみたすなら，この u が境界値 f に対する Ω でのディリクレ問題の解になる．

次の性質をみたす関数 v の集合 $\mathfrak{B}(f)$ を定義する：

（a）　v は Ω では劣調和；

（b）　各 $\zeta\in\Gamma$ に対し，$\overline{\lim_{z\to\zeta}}\, v(z)\leqq f(\zeta)$.

(b)の正確な意味は次の通りである：$\varepsilon>0$ と $\zeta\in\Gamma$ を与えると，ζ の近傍 Δ がとれ，$\Delta\cap\Omega$ において $v(z)<f(\zeta)+\varepsilon$ が成り立つようにできる．$-M$ 以下の定数はすべて (a), (b) をみたすから，$\mathfrak{B}(f)$ は空集合ではない．

補題1　$u(z)=\sup\{v(z);\ v\in\mathfrak{B}(f)\}$ と定義すると，u は Ω で調和になる．

まず，各 v は Ω で $v\leqq M$ をみたす．これは最大値の原理から簡単に導かれることであるが，重要な点だから少しくわしく説明したい．$\varepsilon>0$ を任意に与え，$E=\{z\in\Omega;\ v(z)\geqq M+\varepsilon\}$ とおく．z を補集合 $\sim E$ の点とすると，3つの場合がおこる：(1) Ω の外点である，(2) Γ の点である，(3) Ω の点で，$v(z)<M+\varepsilon$ となっている．(1) の場合は z の近傍で Ω の外部に含まれるものがあり，(2) の場合は (b) により z の近傍 Δ で $\Delta\cap\Omega$ において $v<M+\varepsilon$ となるものがある．(3) の場合は連続性から Ω に含まれる近傍で $v<M+\varepsilon$ が成り立つものがとれる．ゆえに，$\sim E$ は開集合で，E は閉集合になる．さらに Ω は有界だから，E はコンパクトになる．もし E が空集合でないなら，v は E で最大値をとり，これは Ω 上での最大値でもある．(b) により v は M より大きい定数ではありえず，最大値をもつのは矛盾である．したがって，すべての ε に対し E は空集合で，Ω において $v\leqq M$ が成立する．

閉包が Ω に含まれる円 Δ を考え，$z_0\in\Delta$ とする．関数列 $v_n\in\mathfrak{B}(f)$ を $\lim_{n\to\infty} v_n(z_0)=u(z_0)$ にとることができる．$V_n=\max(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ とおく．V_n は $\mathfrak{B}$

(f) の非減少関数列である．Δ の外では V_n に等しく，Δ では V_n のポアソン積分に等しいような関数 V_n' を作る．前節の劣調和関数の性質(4)により，V_n' も $\mathfrak{B}(f)$ にまた入る．これも非減少列を作り，$v_n(z_0)\leqq V_n(z_0)\leqq V_n'(z_0)\leqq u(z_0)$ より $\lim_{n\to\infty} V_n'(z_0)=u(z_0)$ がわかる．ハルナックの原理から，関数列 $\{V_n'\}$ は Δ において調和関数 U に収束し，$U\leqq u$, $U(z_0)=u(z_0)$ をみたす．

別の点 $z_1\in\Delta$ から出発して，同様のことをくり返す．$w_n\in\mathfrak{B}(f)$ を $\lim_{n\to\infty} w_n(z_1)=u(z_1)$ にえらぶが，今度はこの先に進む前に w_n を $\bar{w}_n=\max(v_n, w_n)$ におきかえておく．$W_n=\max(\bar{w}_1, \cdots, \bar{w}_n)$ とおき，ポアソン積分を用いて同様に $\{W_n'\}$ を作ると，その極限関数 U_1 は Δ で調和で，$U\leqq U_1\leqq u$, $U_1(z_1)=u(z_1)$ をみたす．$U-U_1$ は z_0 で最大値 0 をもつことがわかり，ゆえに U は U_1 に恒等的に等しく，各 $z_1\in\Delta$ で $u(z_1)=U(z_1)$ がいえた．u は任意の円 Δ で調和となり，したがって Ω 全体で調和である．

どのような条件の下で，この u が連続な f に対するディリクレ問題の解になるか調べよう．まず，ディリクレ問題はいつも解をもつとは限らないことを注意する．例として，Ω は一点を抜いた円 $0<|z|<1$ とし，$f(0)=1$, $|\zeta|=1$ のときは $f(\zeta)=0$ と境界条件を与える．この境界値をもつ調和関数がもしあれば，それは有界となり，原点は除去可能特異点となってしまう．しかし，このとき最大値の原理から，この関数は恒等的に 0 となり原点で境界値 1 をとりえない．ゆえに，このディリクレ問題は解をもちえない．

もし解が存在すれば，それは上で作った u と一致しなければならない．実際，U を解とするとまず明らかに $U\in\mathfrak{B}(f)$ となり，$u\geqq U$ である．最大値の原理からすべての $v\in\mathfrak{B}(f)$ に対し $v\leqq U$ が成り立ち，これから逆向きの不等式 $u\leqq U$ がえられる．

解の存在は多くの領域に対し成り立つ．おおざっぱにいうと，各境界点の近傍で Ω の補集合が‘薄く’なければ解が存在する．まず，‘薄さ’と一見関係がないように見える補題の証明から始める．

補題 2　$w(z)$ は Ω で調和，Ω の閉包で連続，Ω の境界 Γ 上では $\omega(\zeta_0)=0$ となる一点 ζ_0 を除きつねに $\omega(\zeta)>0$ とする．このような $\omega(z)$ が存在すると

き，$f(\zeta)$ が ζ_0 で連続ならば，ペロンの方法で作った関数 u は $\lim_{z\to\zeta_0} u(z)=f(\zeta_0)$ をみたす．

任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\overline{\lim_{z\to\zeta_0}}\, u(z)\leqq f(\zeta_0)+\varepsilon$, $\underline{\lim_{z\to\zeta_0}}\, u(z)\geqq f(\zeta_0)-\varepsilon$ を示せば，補題は証明できる．Ω は有界領域で，$|f(\zeta)|\leqq M$ はやはり大前提として仮定されている．

ζ_0 の近傍 $\varDelta$ を，$\zeta\in\Gamma\cap\varDelta$ に対し $|f(\zeta)-f(\zeta_0)|<\varepsilon$ になるようにとる．$\Omega-\varDelta\cap\Omega$ で，関数 $\omega(z)$ は正の最小値 ω_0 をもつ．調和関数

$$W(z)=f(\zeta_0)+\varepsilon+\frac{\omega(z)}{\omega_0}(M-f(\zeta_0))$$

の境界値を考える．$\zeta\in\varDelta$ のときは $W(\zeta)\geqq f(\zeta_0)+\varepsilon>f(\zeta)$ であり，ζ が $\varDelta$ の外にあれば $W(\zeta)\geqq M+\varepsilon>f(\zeta)$ である．最大値の原理より，任意の $v\in\mathfrak{B}(f)$ に対し $v(z)<W(z)$ が成り立つ．ゆえに，$u(z)\leqq W(z)$ であり，$\overline{\lim_{z\to\zeta_0}}\, u(z)\leqq W(\zeta_0)=f(\zeta_0)+\varepsilon$ となり，これが目的の不等式の一つである．

もう一つの不等式を示すのには，関数

$$V(z)=f(\zeta_0)-\varepsilon-\frac{\omega(z)}{\omega_0}(M+f(\zeta_0))$$

が $\mathfrak{B}(f)$ に入ることをいえばよい．$\zeta\in\varDelta$ のとき $V(\zeta)\leqq f(\zeta_0)-\varepsilon<f(\zeta)$ であり，そのほかの境界点では $V(\zeta)\leqq -M-\varepsilon<f(\zeta)$ である．V は調和だからこれで $V\in\mathfrak{B}(f)$ となり，$u(z)\geqq V(z)$ で，$\underline{\lim_{z\to\zeta_0}}\, u(z)\geqq V(\zeta_0)=f(\zeta_0)-\varepsilon$ となる．証明終わり．

補題2の関数 $\omega(z)$ は，点 ζ_0 におけるバリアとよばれる．境界の各点でバリアが存在すれば，ディリクレ問題が解けることが，これでわかった．バリアがいつ存在するか，その幾何的な条件を求めることが残っている．必要十分条件は知られているが，純粋に幾何的ではなく適用することが難しい．しかし，適用範囲の広い十分条件を見つけるのは容易である．

もっとも簡単な場合から始めよう．$\Omega\cup\Gamma$ は一点 ζ_0 を除いて半平面に含まれ，点 ζ_0 だけが境界の直線上にのっているとする．この境界直線の方向を α とすると(左側が今考えている半平面)，$\omega(z)=\mathrm{Im}\, e^{-i\alpha}(z-\zeta_0)$ は ζ_0 でのバリアになる．

もっと一般に，ζ_0 を一つの端点とする線分で ζ_0 以外の点はすべて Ω の外部にあるようなものがとれたと仮定する．もう一つの端点を ζ_1 とすると，

$$\sqrt{(z-\zeta_0)/(z-\zeta_1)}$$

の一価な枝がこの線分の外で定義できる．角 α を適当にとると，関数

$$\mathrm{Im}\,(e^{-i\alpha}\sqrt{(z-\zeta_0)/(z-\zeta_1)})$$

は ζ_0 でのバリアになることが容易にわかる．

これがこの方法でえられる最良の結果というわけではないが，たいていの応用にはこれで十分である．次のようにまとめておこう：

定理 9　各境界点が，その点を除き Ω の外部にあるような線分の端点となりうるとき，領域 Ω でディリクレ問題は解をもつ．

Ω とその補集合が，各点で接線をもつような単純閉曲線の有限個からなる境界を共有するときは，この仮定はみたされる．角(かど)とある種の尖点はあってもよい[†]．

問　題

1. $\Omega=\{0<|z|<1\}$ とし，$|\zeta|=1$ のとき $f(\zeta)=0$, $f(0)=1$ とする．このとき，任意の $v\in\mathfrak{B}(f)$ は Ω で $\leqq 0$ となることを示せ．

5．多重連結領域の標準写像

リーマンの写像定理によれば，全平面と異なる任意の 2 つの単連結領域は互いに等角写像で写り合う，いいかえれば**等角同値**である．同じ連結度の多重連結領域に対しては，これはもはや正しくない．代りに標準領域の族をみつけ，任意の多重連結領域は一つのそして一つだけの標準領域と等角同値になるようにしたい．標準領域に何をとるかはある程度の任意性があり，同じ単純な性質をもついくつかの型がある．

初等的な水準で話をしたいので，有限連結度の領域に限ることにする．標

---

†) 本質的にこれと同じ方法で証明できる最良の結果は次のようなものである：Ω の補集合の連結成分の中に一点だけからなるようなものがないとき，領域 Ω でディリクレ問題は解ける．この定理から，リーマンの写像定理の別証を容易にすることができる．

準写像の構成の基本的な段階は，境界上で特に簡単なふるまいをする調和関数を導入する所である．この中で，調和測度は領域と境界成分の一つだけできまり，一方，グリーン関数は領域と一つの内点とできまるものである．

5.1. 調和測度　領域 Ω の等角写像を研究する際に，Ω と等角同値なことがわかっている別の領域に Ω をおきかえてよい．つまり，事前に任意に等角写像をほどこしておいてかまわない．もとの領域の選び方のこの自由性によって，境界の複雑さから起る困難をさけることができることを，まず見よう．

以後，Ω は連結度 $n>1$ の平面領域とする．Ω の補集合の連結成分を E_1, $E_2, \cdots, E_n$ とし，E_n が非有界な成分であるとする．一般性を失うことなく，

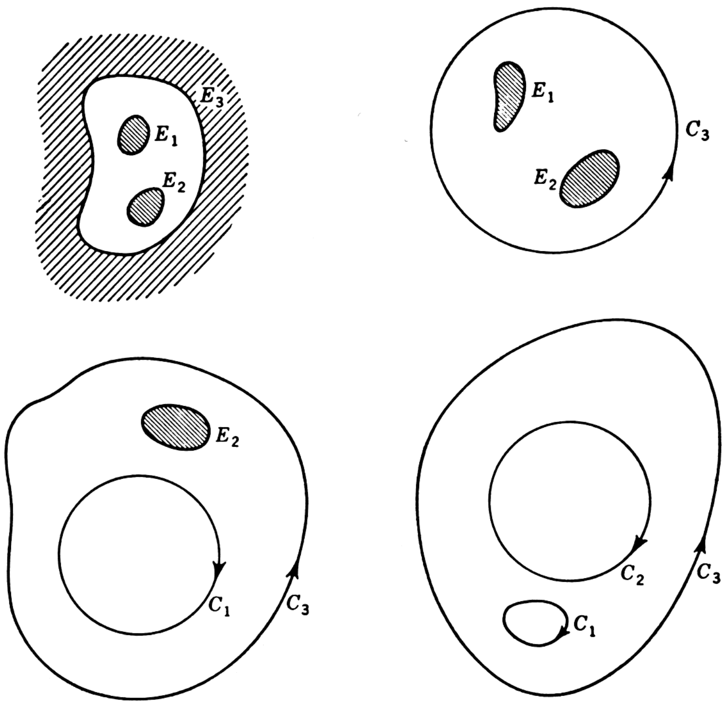


図 6-3　多重連結領域の変換

どの E_k も一点だけからなるということはないとしてよい．というのは，明らかに一点だけの連結成分というのは写像関数の除去可能特異点であり，したがってこの孤立境界点を領域に加えておいても写像はかわらない．

E_n の補集合は単連結領域 Ω' である．リーマンの定理より，Ω' は円 $|z|<1$ に等角に写すことができる．この写像で Ω は新しい領域に写され，$E_1, \cdots, E_{n-1}$ の像は補集合の有界連結成分である．簡単のために，この写像をする前と同じ記号で写したものをかくことにする；とくに，E_n は今度は $|z|\geqq 1$ である．単位円周 $|z|=1$ を正の向きにとり C_n とかき，Ω の外側の境界線という．

今度は拡張された平面で E_1 の補集合を考える．これはまた単連結領域であり，単位円の外部の上へ等角に写し，∞は∞に対応するようにできる．C_n の像は向きのついた単純閉曲線で，また引き続いて C_n とかくことにし，ほかの記号もそのままにする．新しい平面の単位円周で内側の境界線 C_1 を定義し，方向は負の向きにとっておく．

この方法をくり返し，領域 Ω は外側境界線 C_n と $n-1$ 個の内側境界線 $C_1 \cdots, C_{n-1}$ で囲まれた領域になるまで行う（図6-3）．重要な注意であるが，平面の各点に関する境界線の回転数を簡単に計算することができる．例えば，C_k, $k<n$ が単位円周である段階では，C_k の指数は E_k の内点に対しては -1 で，C_k 上にない他の点に対しては 0 である．これからあとの写像ではこの情勢を変えない．これは明らかであるが，厳密な証明は偏角の原理にもとづいて容易にできる．同様にして，外側境界線 C_n は E_n の内点に関しては指数 0 であり，C_n 上にない他の点に関しては 1 であることがわかる．サイクル $C=C_1+C_2+\cdots+C_n$ は 4 章 5.1 節定義 4 の意味で Ω を囲む．内側と外側との境界線の差異は偶然である．明らかに，E_k の内点に関し反転すれば，C_k が外側境界線になってしまう．

定理 9 は明らかにこの Ω に適用できる．実際，バリアの存在は，各境界線を円周に写すことができるのだから，まったく明白である．

C_k 上では 1，他の境界線上には 0 をおいて，Ω でディリクレ問題を解いてみる．その解を $\omega_k(z)$ とかき，領域 Ω に関する C_k の**調和測度**という．明

らかに，Ω で $0<\omega_k(z)<1$ であり，恒等的に

$$\omega_1(z)+\omega_2(z)+\cdots+\omega_n(z)=1$$

が成立する．Ω を C_i が円周になるように写すと，鏡像の原理により ω_k は C_i をこえて接続することができる．ゆえに，もう少し大きい領域でそうなっているという意味で，ω_k は閉領域 Ω^- で調和である．

境界線 $C_1, \cdots, C_{n-1}$ は Ω 内のサイクルに対するホモロジーの基底になっている．ここで，ホモロジーは明記しないが一寸大きな領域に関するものである．ω_k の共役調和微分は，C_j にそって周期

$$\alpha_{kj}=\int_{C_j}\frac{\partial\omega_k}{\partial n}ds=\int_{C_j}{}^*d\omega_k$$

をもつ．定数係数の一次結合 $\lambda_1\omega_1(z)+\lambda_2\omega_2(z)+\cdots+\lambda_{n-1}\omega_{n-1}(z)$ が一価の共役調和関数をもつのは，λ_i がすべて 0 のときだけであることを示す．このために，この一次結合が解析関数 $f(z)$ の実部であったとしよう．鏡像の原理により，$f(z)$ は Ω の閉包に解析接続可能である．$f(z)$ の実部は各 C_i, $i=1, 2 \cdots, n-1$ の上では定数 λ_i に等しく，C_n の上では 0 である．したがって，各境界線は垂直な線分の上に写る．これらの線分の上にない点を w_0 とすると，各境界線上で一価な $\arg(f(z)-w_0)$ の枝が定まる．ゆえに，偏角の原理から $f(z)$ は Ω で値 w_0 をとりえないことがわかる．このとき，$f(z)$ は定数になってしまう．もしそうでなければ，Ω の像はこれらの線分上にない点を含むからである．これから，$f(z)$ の実部は恒等的に 0 になることがいえ，境界値 λ_i はすべて 0 でなければならぬ．

これで証明できたことは，同次の連立一次方程式

$$\lambda_1\alpha_{1j}+\lambda_2\alpha_{2j}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,j}=0 \quad (j=1, \cdots, n-1) \tag{13}$$

の解が自明な解だけであることである．というのは，これが $\lambda_1\omega_1+\cdots+\lambda_{n-1}\omega_{n-1}$ が一価な共役をもつための条件だからである．連立一次方程式の定理から，(13)と同じ係数をもつ非同次の連立一次方程式は唯一つの解をもつことがいえる．とくに，連立方程式

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
&\lambda_1\alpha_{11}+\lambda_2\alpha_{21}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,1}=2\pi\\
&\lambda_1\alpha_{12}+\lambda_2\alpha_{22}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,2}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lambda_1\alpha_{1,n-1}+\lambda_2\alpha_{2,n-1}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,n-1}=0\\
&\lambda_1\alpha_{1n}+\lambda_2\alpha_{2n}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,n}=-2\pi
\end{aligned}
$$

は解をもつ．ここで，$\alpha_{k1}+\alpha_{k2}+\cdots+\alpha_{kn}=0$ なので，最後の式は上の $n-1$ 個の式から自動的に導かれる．いいかえると，C_1, C_n にそって $\pm 2\pi i$ の周期をもち他の周期はすべて 0 に等しく，C_k の上では実部が λ_k に等しい多価な積分 $f(z)$ をみつけることができる．($\lambda_n=0$ とおく)．$F(z)=e^{f(z)}$ とおくと，これは一価関数である．この $F(z)$ に対し，次の定理を証明しよう：

定理10　関数 $F(z)$ は Ω を 1 対 1 等角に，円環 $1<|w|<e^{\lambda_1}$ から $|w|=e^{\lambda_i}$ 上にある同心円弧 ($n-2$ 個ある，$i=2, \cdots, n-1$) を抜いた残りの領域の上へ写す．

写像を図 6-4 に図示しておく．C_1 と C_2 は全円周に 1 対 1 対応をするが，他の境界線は円弧截線につぶされてしまう．各円弧截線は両側のふちをもち両端点と共に一つの閉曲線を作っていると思ってほしい．

証明には偏角の原理を用いる．$F(z)$ は解析的で，各境界線上で絶対値が一定であることは知っている．方程式 $F(z)=w_0$ の根の個数は，w_0 が境界上にないとすればとにかく

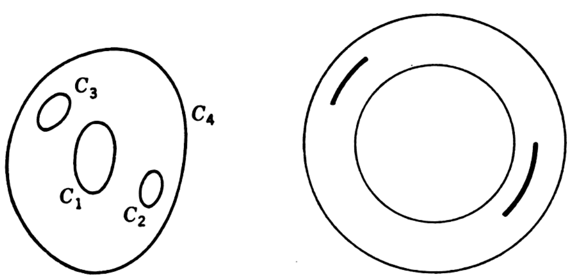


図 6-4　同心円弧截線領域

$$(15)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{F'(z)dz}{F(z)-w_0}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{F'(z)dz}{F(z)-w_0}+\cdots$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{F'(z)dz}{F(z)-w_0}$$

によって与えられる．$w_0=0$ のときには，(15)の各項は，それぞれ $1, 0, \cdots, 0, -1$ に等しいことがわかっている．C_1 上のこの積分は，$|w_0|<e^{\lambda_1}$ のときは一定で1に等しく，$|w_0|>e^{\lambda_1}$ のときは0になる．同様に，最後の積分は $|w_0|<1$ のとき1で，$|w_0|>1$ のとき0である．C_k, $1<k<n$ の上の積分は $|w_0|\neq e^{\lambda_k}$ をみたすすべての w_0 に対し0である．$F(z)$ が実際に値 w_0 をとったと仮定しよう；Ω は開集合の上に写るから，$|w_0|$ は e^{λ_i} のどれとも等しくないとしておく．この w_0 に対しては(15)式は正でなければならぬ．しかし，これは $1<|w_0|<e^{\lambda_1}$ のときだけ可能である．ゆえに，$\lambda_1>0$ であり，連続性より $0\leqq\lambda_i\leqq\lambda_1$ である．

ここからは純粋に位相的な議論により証明を完成させることもできる．しかし，偏角の原理から結論を導く方が有益でより簡単である．境界上に1位の極があるときは，境界上の積分をコーシーの主値でおきかえ，留数の和をとるときに境界上では留数の半分を加えることにすれば，留数の定理は成立する†．今の状況の下では，境界上でとる値はその重複度の半分だけ数えるということを意味している．主値の計算は難しくない．初等幾何（または直接の計算）から，$|w_0|=e^{\lambda_k}$ のとき C_k 上で

$$d\arg(F(z)-w_0)=(d\arg F(z))/2$$

となるから，

$$\text{pr. v.}\int_{C_k}\frac{F'(z)dz}{F(z)-w_0}=\frac{1}{2}\int_{C_k}\frac{F'(z)dz}{F(z)}$$

がわかる．ゆえに，(15)の中の主値は，$k=1$ のとき $1/2$, $2\leqq k\leqq n-1$ のとき 0, $k=n$ のとき $-1/2$ となる．

---

†) 4章5.3節で直線上の積分の場合にコーシーの主値を定義した．解析曲線の場合に主値を定義するには，曲線の一部を線分に写す等角写像を媒介にするのが一番簡単である．ここでのべた留数の定理をうるのはまったく易しく，それから主値は媒介にした等角写像のとり方によらないことが証明される．

これで，円周$|w_0|=1$または$|w_0|=e^{\lambda_1}$の上の各値w_0に対しては(15)は1/2となり，その値は境界上で一度だけとられることがわかる；これは，C_1とC_nが対応する円周の上へ1対1に写り，$0<\lambda_i<\lambda_1$, $i\neq 1$, nを証明している．次に，$1<|w_0|<e^{\lambda_1}$のときには(15)の値は1で，値w_0をとる点がΩの内部にただ1点あるか，境界上に2点あるか，または境界上に1点だけありそこは重複度2であるか，そのいずれかである．各境界線$C_2, \cdots, C_{n-1}$上で$\arg F(z)$の一価な枝が定義でき，重複度2の値は$\arg F(z)$の極大，極小に対応する．極大，極小は少くとも一つはあるが，それ以上はありえない．さもないと，$F(z)$が同じ値を二度より多くとることがおきてしまう．さらに，極大値と極小値との差は$<2\pi$である．これは，各境界線が円弧の上に写ることを示している．最後に，異なる境界線に対応する円弧は，共通点をもちえない．

これで定理10の証明は完成したが，さらに境界の対応を述べることもできた．定理の意義は，Ωを二つの円周と$n-2$個の同心円弧を境界とする標準領域の上へ等角写像できるという点である；正規化のしかたから，内側の円周の半径は1になっている．C_1とC_nの選び方をきめると，この標準写像は回転を除いて一意的に定まる．これは，連立方程式(14)の解がただ一組であることからいえる．

連結度nの標準領域の型は$3n-6$個の実数の定数により定まる．実際，各截線の位置と大きさは3個の実数できまり，全体で$3n-6$個となる．円環の厚さが一つの助変数になるが，一方で回転を無視して助変数が一つへるから，これは数えなくてよい*.

問　題

1. 二つの円環が等角同値になるのは半径の比が等しいとき，そのときだけであることを，直接に証明せよ．
2. $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$を証明せよ．ヒント：：4章定理19を用いよ．

5.2. グリーン関数

またΩは連結度nの領域と仮定し，事前に等角

*) $n\geqq 3$のときである．$n=2$のときは，厚みが1個の助変数で，標準領域(円環)の型は1個の実定数できまる．(訳注)

写像をしておいて，Ω は解析的な境界線 $C_1, \cdots, C_n$ で囲まれているとする；ここでは $n=1$ の場合も含めておく．

1点 $z_0 \in \Omega$ を考え，境界値 $\log|\zeta - z_0|$ を与えて Ω でディリクレ問題を解く．その解を $G(z)$ とかくが，主な関心は z_0 で極をもつ Ω の**グリーン関数**とよばれる $g(z)=G(z)-\log|z-z_0|$ の方にある．z_0 に関係していることを強調するために $g(z, z_0)$ とかくことにする．

グリーン関数は z_0 を除き Ω で調和であり，境界では0になる．z_0 の近傍では，調和関数と $-\log|z-z_0|$ だけの差がある．この性質により $g(z)$ は一意的にきまる．実際，$g_1(z)$ がこの同じ性質をもつと，$g-g_1$ は Ω 全体で調和で境界では0となる．最大値原理により g_1 は g に等しくなる．

二つの領域が等角同値ならば，対応する点を極にもつグリーン関数は対応する各点で同じ値をとる．きちんというと，$z=z(\zeta)$ が ζ 平面の領域 Ω' を z 平面の領域 Ω の上への1対1等角写像を定義しているとする．$\zeta_0 \in \Omega'$ とし，$z_0=z(\zeta_0)$ に極をもつ Ω のグリーン関数を $g(z, z_0)$ とかく．このとき，$g(z(\zeta), z_0)$ は ζ_0 に極をもつ Ω' のグリーン関数になるというのである．証明のために，まず ζ を境界点に近づけると，$z(\zeta)$ は Ω の境界に近づき，ゆえに $g(z(\zeta), z_0)$ の境界値は0である．ζ_0 でのふるまいについては，$g(z(\zeta), z_0)$ から $\log|z(\zeta)-z(\zeta_0)|$ を引けば $z(\zeta)$ の調和関数になることがわかっており，ゆえに ζ の調和関数である．差 $\log|z(\zeta)-z(\zeta_0)|-\log|\zeta-\zeta_0|$ も ζ の調和関数だから，$g(z(\zeta), z_0)-\log|\zeta-\zeta_0|$ は ζ_0 で調和になる．これで，グリーン関数は等角写像で不変なことがいえた．この不変性によって，事前に等角写像を任意にしておいてよいことがわかる．

単連結領域のときには，グリーン関数とリーマンの写像関数の間に簡単な関係がある．単位円 $|w|<1$ に対し，原点に関するグリーン関数は明らかに $-\log|w|$ である．したがって，$w=f(z)$ が Ω を単位円に写し z_0 が原点に写るとすると，不変性から

$$g(z, z_0) = -\log|f(z)|$$

となる．逆に，$g(z, z_0)$ がわかると，写像関数をこれできめることができる．

グリーン関数は対称性をもち，それは重要である．２点 $z_1, z_2 \in \Omega$ を与え，簡単のため，$g(z, z_1)=g_1$，$g(z, z_2)=g_2$ とかく　４章定理19より，微分形式 $g_1{}^*dg_2-g_2{}^*dg_1$ は，Ω から z_1, z_2 を除いた領域で，局所的に完全である．c_1, c_2 を z_1, z_2 を中心とする小円周とし向きは正にとると，サイクル $C-c_1-c_2$ は０にホモローグである（前と同様に，$C=C_1+\cdots+C_n$）．g_1, g_2 は C 上では０だから

$$\int_{c_1+c_2} g_1{}^*d\zeta_2-g_2{}^*dg_1=0$$

をうる．$G_1=g_1+\log|z-z_1|$ とおくと，${}^*dg_1={}^*dG_1-d\arg(z-z_1)$ となり，

$$\begin{aligned}\int_{c_1} & g_1{}^*dg_2-g_2{}^*dg_1\\ &=\int_{c_1} G_1{}^*dg_2-g_2{}^*dG_1-\int_{c_1}\log|z-z_1|{}^*dg_2+\int_{c_1} g_2 d\arg(z-z_1)\end{aligned}$$

である．右辺で，G_1 と g_2 は c_1 の内部で調和だから第一項の積分は０となり，$|z-z_1|$ は c_1 上で定数であり ${}^*dg_2$ は z_1 の近傍で完全微分だから第二項も０である．調和関数の平均値の性質から第三項は $2\pi g_2(z_1)$ に等しい．c_2 の上の積分も同様にして，$-2\pi g_1(z_2)$ に等しいことがいえる．ゆえに，$g_2(z_1)-g_1(z_2)=0$，すなわち，

$$g(z_1, z_2)=g(z_2, z_1)$$

がわかった．この対称性により，グリーン関数 $g(z, z_0)$ は，うしろの変数 z_0 に関しても調和である．

$g(z, z_0)$ の共役関数を $h(z, z_0)$ とかくと，これはもちろん多価関数である．とくに，z_0 を中心とする小円周 c にそって 2π の周期をもっている．さらに，

$$P_k(z_0)=\int_{C_k} dh(z, z_0)=\int_{C_k} {}^*dg(z, z_0) \quad (k=1, \cdots, n)$$

を周期としてもつ．

補題３　周期 $P_k(z_0)$ は調和測度 $\omega_k(z_0)$ の 2π 倍に等しい．

証明はまた４章定理19の応用である．$C-c$ の上の $\omega^*dg-g^*d\omega_k$ の積分は

0 になる．C 上の積分は $P_k(z_0)$ になり，上と同じ計算で c の上の積分は $2\pi\omega(z_0)$ に等しくなる．ゆえに，$P_k(z_0)=2\pi\omega_k(z_0)$ である．

5.3. 平行截線領域　$z_0=x_0+iy_0\in\Omega$ とし，前節より少し具体的に

$$g(z, z_0)=G(z, z_0)-\log|z-z_0| \tag{16}$$

とかく．$G(z, z_0)$ は対称で，各変数ごとに調和関数である．z の関数として，境界値が $\log|\zeta-z_0|$ になっている．

h を実数とし，z_0+h がまだ Ω に入るように小さくとり，差商 $Q(z, h)=\{G(z, z_0+h)-G(z, z_0)\}/h$ を考える．これは z の調和関数で，境界値は $\{\log|\zeta-z_0-h|-\log|\zeta-z_0|\}/h$ である．$h\to 0$ とすると，境界値は一様に $\partial\log|\zeta-z_0|/\partial x_0=-\mathrm{Re}\{1/(\zeta-z_0)\}$ に収束する．最大値・最小値の原理からコンパクト集合の上だけでなく Ω 全体で，$h\to 0$ のとき一様に $Q(z, h)$ は $\partial G(z, z_0)/\partial x_0$ に収束する．境界値も含めれば，コンパクト集合である閉包 Ω^- の上で一様収束している．これから，z の関数として $\partial G(z, z_0)/\partial x_0$ は Ω で調和関数になり，境界値が $-\mathrm{Re}\{1/(\zeta-z_0)\}$ であることがいえる．(16) と比べて，$u_1(z)=\partial g(z, z_0)/\partial x_0$ は $z\neq z_0$ に対し調和であり，境界値は 0 で，z_0 の近傍で調和関数と $\mathrm{Re}\{1/(z-z_0)\}$ だけ差がある．

$u_1(z)$ の共役微分の境界線 C_k にそう周期を A_k としよう．$u_1(z)$ と調和測度 $\omega_j(z)$ の一次結合を，その共役微分が周期をもたないように，作ることは易しい．つまり，前にみたように連立方程式

$$\lambda_1\alpha_{1k}+\lambda_2\alpha_{2k}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1, k}=-A_k \quad (k=1, \cdots, n-1)$$

は解 λ_j をもち，この λ_j による $u_1+\lambda_1\omega_1+\cdots+\lambda_{n-1}\omega_{n-1}$ が求めるものである．これで，次のような $p(z)$ の存在がいえた：$p(z)$ は Ω で z_0 を除き一価解析関数であり，z_0 は1位の極で留数は1，$p(z)$ の実部は各境界線上で一定である．これだけの性質により，$p(z)$ は定数の差を除いて一意的に定まる．

y_0 に関し微分することによりまったく同様にして，$v_2(z)=-\partial g(z, z_0)/\partial y_0$ は境界上で 0 となり，$\mathrm{Im}\{1/(z-z_0)\}$ と同じ特異点をもつことがわかる．調

和測度の適当な一次結合を加えると，共役関数は一価にできる．ゆえに，特異部 $1/(z-z_0)$ をもつ一価解析関数 $q(z)$ で，各境界線上で虚部が一定になるものが存在する．

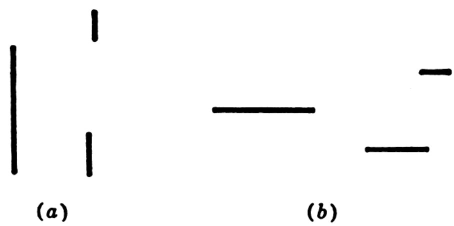


図 6-5　平行截線領域

関数 $p(z)$, $q(z)$ は簡単な標準写像になっている．

定理11　$p(z)$, $q(z)$ によって定まる写像は1対1であり，Ω の像は截線領域でその補集合は垂直または平行な n 本の線分になっている（図6-5 a, b）．

証明は定理10の証明とまったく同じである．今度は，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} \frac{p'(z)dz}{p(z)-w_0} \tag{17}$$

は，$p(z)-w_0$ の零点の個数から $p(z)$ の極の個数を引いたものになっている．(17)の値が境界値も含めてすべての w_0 に対し0になることは見易い．w_0 が境界値の場合，主値をとらねばならないが，値 w_0 が C_k の上でとられたとすると，$p'dz/(p-w_0)$ の虚部は C_k 上で0であり，困難はまったくない．極はちょうど1個だから，任意の w_0 に対し，$p(z)$ は Ω の内部のただ1点だけで w_0 となるか，境界上の2点で w_0 となるか，または境界上の1点で重複度2で w_0 となるか，そのいずれかである．このあとの証明の続きは，前とまったく同じである．$q(z)$ に対する証明も同様である．

平行截線領域を標準領域と考えてもよいが，∞を固定して∞は∞に写ると仮定しても，異なる平行截線領域で等角同値なものがありうる．例えば，$p(z)$ と $iq(z)$ は異なる平行垂直截線領域に写すが，それらは等角同値である．z_0 で同じ留数をもつ写像に対してのみ，截線写像の一意性が平行移動を除いていえる．

問　題

1. $g(z, z_0)$ は $z \neq z_0$ のとき両変数に関して連続であることを示せ．ヒント：$G(z, z_0)$ に最大値・最小値原理を用いよ．

2. 関数 $e^{-i\alpha}(q\cos\alpha+ip\sin\alpha)$ は，Ω を傾斜截線領域の上へ写すことを示せ.

***3.** 前問を用いて，$p+q$ は Ω を1対1に，凸な境界線で囲まれた領域の上へ写すことを示せ．解説：

(i) 閉曲線が凸というのは，任意の直線に対し交点が高々2点であること.

(ii) $p+q$ による C_k の像が凸であることを示すには次のことをいえばよい：任意の α に対し関数 $\mathrm{Re}(p+q)e^{i\alpha}$ が C_k 上で同じ値を2回より多くとることはない．$\mathrm{Re}(p+q)e^{i\alpha}$ は $\mathrm{Re}(q\cos\alpha+ip\sin\alpha)$ と定数だけ異なり，前問の写像関数の性質からこれがいえる.

(iii) 最後に，偏角の原理を用いて，$p+q$ のすべての値に関し C_k の像の回転数が0であることを示す．とくに，これから凸な境界線が互いに外にあることが示される.

第7章　楕 円 関 数

1. 単周期関数

関数 $f(z)$ が $\omega\neq0$ を周期とする周期関数であるというのは，すべての z に対し

$$f(z+\omega)=f(z)$$

が成立することである．例えば，e^z は周期 $2\pi i$ をもち，$\sin z$ と $\cos z$ は周期 2π をもつ．もっと正確にいうと，われわれは解析関数か有理形関数だけを考え，平行移動 $z\to z+\omega$ で自分自身の上へ写るような領域 Ω を考えている．

ω が周期なら整数倍 $n\omega$ もすべて周期である．もっとほかに周期があるかもしれないが，まず今は周期 $n\omega$ にもっぱら注意を向ける．この立場から，$f(z)$ を周期 ω の単周期関数という．ω がほかの周期の整数倍になっていることもありうるが，ここではそれも問題にしない．

1.1. 指数関数による表示

周期 ω をもつ一番簡単な関数は指数関数 $e^{2\pi iz/\omega}$ であり，基本的な事実として，この関数を用いて周期 ω をもつ任意の関数は表示できる．

Ω は領域とし，$z\in\Omega$ ならば $z+\omega\in\Omega$, $z-\omega\in\Omega$ となると仮定する．ζ 平面への写像 $\zeta=e^{2\pi iz/\omega}$ による Ω の像を Ω' とすると，これは領域になる．例えば Ω が全平面ならば，Ω' は全平面から原点を抜いたものである．Ω が $a<\mathrm{Im}\,(2\pi z/\omega)<b$ で定義される平行な帯ならば，Ω' は円環 $e^{-b}<|\zeta|<e^{-a}$ である．

$f(z)$ は Ω で有理形関数で，周期 ω をもつとしよう．すると，

(1)
$$f(z)=F(e^{2\pi iz/\omega})$$

をみたす Ω' での関数 F がただ一つ存在する．実際，$F(\zeta)$ をきめるために，$\zeta=e^{2\pi iz/\omega}$ とかいてみよう；z は ω の整数倍の差を除いて一意的に定まり，この差は $f(z)$ の値に影響を与えない．明らかに F は有理形関数になる．逆に，Ω' での有理形関数 F を与えると，(1) は周期 ω の有理形関数 f を Ω で定義する．

1.2. フーリエ展開　Ω' が円環 $r_1<|\zeta|<r_2$ を含みそこで F が極をもたないと仮定する．すると，この円環で F は

$$F(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\zeta^n$$

とローラン展開でき，これから次の式をうる：

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{2\pi inz/\omega}.$$

これが $f(z)$ の複素フーリエ展開であり，与えられた円環に対応する平行な帯でこの式は正しい．係数は

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}F(\zeta)\zeta^{-n-1}d\zeta,\quad (r_1<r<r_2)$$

で与えられ(5章1.3節参照)，変数変換をすると

$$c_n=\frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega}f(z)e^{-2\pi inz/\omega}dz$$

となる．ここで，a はこの平行な帯の中の任意の点で，積分の道はこの平行な帯の中で a から $a+\omega$ にいたる任意の曲線である．$f(z)$ が全平面で解析的ならば，フーリエ展開はいたる所で正しい．

1.3. 有限位数の関数　Ω が全平面とすると，$\zeta=0$ と $\zeta=\infty$ は $F(\zeta)$ の孤立特異点である．この両者が真性特異点でないとき，つまり除去可能特異点か極のとき，F は有理関数になる．この場合に，f は有限位数であると

いい，有理関数 F の位数（2章1.4節）を f の位数という．

有理関数は∞も含めてすべての複素数を，重複度だけ数えることにすれば，同じ回数だけ値としてとることを知っている．z と $z+\omega$ とを同一視することにすれば，有限位数の単周期関数に対して同じ結果が成立する．便宜上，$z+n\omega$ は z と同値であるということにする．f が位数 m とすると，重複度は適当に数えて，任意の複素数 $c\neq F(0)$，$F(\infty)$ に対し m 個の互いに同値でない点で f は値 c をとることがわかる．さらに，$\mathrm{Im}\,(z/\omega)\to+\infty$ のときに $f(z)\to F(0)$ となり，$\mathrm{Im}\,(z/\omega)\to-\infty$ のときに $f(z)\to F(\infty)$ がいえる．これらの値も'とる'ということにすれば（適当な重複度で），すべての複素数値をちょうど m 回とるといえる．

別のいい方として，$0\leqq \mathrm{Im}\,(z/\omega)<2\pi$ で定義される平行な帯を考えてもよい．この帯は各同値類から一つずつ，そして一つだけの代表を含んでいるから，$f(z)$ はこの帯の中で各複素数を値としてちょうど m 回とる．もちろん，$F(0)$ と $F(\infty)$ に対しては特別な注意が必要である．

2．二重周期関数

楕円関数と二重周期関数とは同義語である；長方形とある種の三角形の等角写像と関連してそのような関数の例は前に述べた（6章2節）．楕円関数は，その関数論的性質やら代数学と整数論における重要さのゆえに，非常に広い研究の対象であった．ここで紹介するのはもっとも基本的な部分だけである．

2.1．周期加群

$f(z)$ を全平面での有理形関数とする．f の周期の全体の集合 M をきめよう．ω が周期ならば整数倍 $n\omega$ もそうで，ω_1, ω_2 が M に属せば $\omega_1+\omega_2$ も M に属す；ゆえに整数係数の一次結合 $n_1\omega_1+n_2\omega_2$ も M に入る．代数ではこのような集合を加群（正確には，整数環を係数とする加群）という．M を f の周期加群という．

定数関数という自明な場合を除くと，M はまた位相的性質ももつ；M の

点はすべて孤立している．実際，すべての $\omega\in M$ に対し $f(\omega)=f(0)$ だから，M が有限の集積点をもてば f が定数になってしまう．孤立点ばかりからなる加群は離散的であるという．

まず最初の段階は，離散加群をすべて決定することである．

定理 1　離散加群は，0 だけからなるか，一つの複素数 $\omega\neq0$ の整数倍 $n\omega$ の全体からなるか，比 ω_2/ω_1 が実数でない二数 ω_1, ω_2 の整数係数の一次結合 $n_1\omega_1+n_2\omega_2$ の全体からなるか，そのいずれかである．

M が 0 でない数 ω を含むならば，絶対値が最小の数 $\omega_1\neq0$ を含む．何故なら，r を十分大きくとると $|z|\leqq r$ は 0 のほかに M の点を含む．しかし，M の点は孤立点ばかりだから，$|z|\leqq r$ の中には M の点は有限個で，その中から 0 に一番近い点の一つを ω_1 とすればよい（一番近い点は，2 点か 4 点か 6 点あることが示せるだろう）．整数倍 $n\omega_1$ は M に入り，M はこれで全部になっている場合がある．

ω_1 の整数倍でない $\omega\in M$ があると仮定しよう．このような ω の中で絶対値が最小なもの ω_2 がある．このとき ω_2/ω_1 が実数でないことを示す．もし実数だったとすると，$n<\omega_2/\omega_1<n+1$ に整数 n がとれる．これから $0<|n\omega_1-\omega_2|<|\omega_1|$ となり，$n\omega_1-\omega_2\in M$ だから ω_1 のとり方に矛盾する．

さて，M のすべての数が $n_1\omega_1+n_2\omega_2$ の形でかけることを証明しよう．まず，ω_2/ω_1 は実数でないから，任意の複素数 ω は，実数 λ_1, λ_2 により $\omega=\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2$ という形でかける．これを示すには，連立方程式

$$\omega=\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2$$
$$\bar{\omega}=\lambda_1\bar{\omega}_1+\lambda_2\bar{\omega}_2$$

をとけばよい．行列式 $\omega_1\bar{\omega}_2-\omega_2\bar{\omega}_1$ は $\neq0$ だから，この連立方程式はただ一組の解 (λ_1, λ_2) をもつ；しかし，$(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$ もまた解だから，これから λ_1, λ_2 が実数であることがわかる．証明を続けて，整数 m_1, m_2 を $|\lambda_1-m_1|\leqq1/2$, $|\lambda_2-m_2|\leqq1/2$ にとる．こうすると，$\omega\in M$ のとき，

$$\omega'=\omega-m_1\omega_1-m_2\omega_2$$

はまた M に入る．$|\omega'|<\frac{1}{2}|\omega_1|+\frac{1}{2}|\omega_2|\leqq|\omega_2|$ が成り立つ；最初の不等式に等号がつかないのは，ω_2 が ω_1 の実数倍でないからである．ω_2 のとり方から，ω' は ω_1 の整数倍でなければならず，ゆえに ω は目的の形にかける．

2.2. ユニモジュラー変換　これからは，定理1の3つの場合のうち最後の場合を考える．組 (ω_1, ω_2) は，任意の $\omega\in M$ がただ一通りに $\omega=n_1\omega_1+n_2\omega_2$ という形で表わせるという性質をもっている．この性質をもつ二つの複素数の組を M の**基底**という．(定理1の証明の作り方によるものでなくてもよい)．

M の基底が2組 $(\omega_1, \omega_2), (\omega_1', \omega_2')$ あるとして，その関係を調べたい．(ω_1, ω_2) は基底だから，整数 a, b, c, d によって

$$
\begin{aligned}
\omega_2' &= a\omega_2+b\omega_1 \\
\omega_1' &= c\omega_2+d\omega_1
\end{aligned}
\tag{2}
$$

とかける．これを，行列を用いて

$$
\begin{pmatrix}\omega_2' \\ \omega_1'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2 \\ \omega_1\end{pmatrix}
$$

とかくことにしたい．複素共役をとってもこの式は成り立つから，

$$
\begin{pmatrix}\omega_2' & \bar{\omega}_2' \\ \omega_1' & \bar{\omega}_1'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2 & \bar{\omega}_2 \\ \omega_1 & \bar{\omega}_1\end{pmatrix}
\tag{3}
$$

が成り立つ．(ω_1', ω_2') も基底だから，同様にして

$$
\begin{pmatrix}\omega_2 & \bar{\omega}_2 \\ \omega_1 & \bar{\omega}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2' & \bar{\omega}_2' \\ \omega_1' & \bar{\omega}_1'\end{pmatrix}
\tag{4}
$$

が，整数 a', b', c', d' を用いて成立する．

(3)と(4)から

$$
\begin{pmatrix}\omega_2 & \bar{\omega}_2 \\ \omega_1 & \bar{\omega}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2 & \bar{\omega}_2 \\ \omega_1 & \bar{\omega}_1\end{pmatrix}
\tag{5}
$$

をうる．ここで，行列式 $\omega_2\bar{\omega}_1-\omega_1\bar{\omega}_2$ は $\neq 0$ である．何故なら，もしそうで

ないならば加群 M に入る任意の2数の比は実数となり，これは仮定に反するからである．行列式が $\neq 0$ の行列は逆行列をもつから，(5) に左から逆行列をかけ，

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

をうる．ゆえに，行列 $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ と行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は互いに逆行列である．とくに，その行列式は

$$\begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=1$$

となり，両者はともに整数だから

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}=\pm 1$$

でなければならない．

整数を係数とする (2) の形の一次変換で行列式が ± 1 のものを**ユニモジュラー変換**という．これで次のことが証明された：

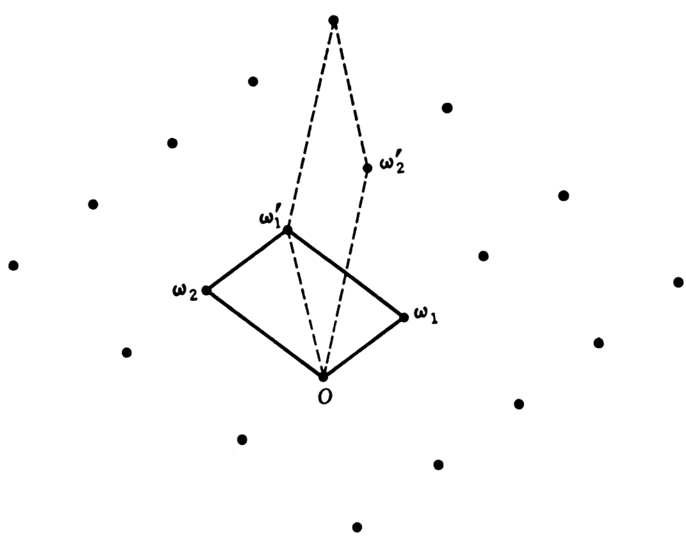


図 7-1　周　期　加　群

同じ加群の二つの基底はユニモジュラー変換で写りあう.

幾何学的には，加群に属するすべての数が作る格子と関連して，基底 (ω_1, ω_2) の張る平行四辺形を考えるのが自然である．図 7-1 に，同じ加群の二つの基底を図示している．二つの平行四辺形は同じ面積をもつことを確かめてほしい．

ユニモジュラー行列の全体，あるいはそれに対応する一次変換の全体は群を作り，それを**モジュラー群**という．

2.3. 標準基底

M の基底の中から標準基底とよばれるほぼ一意的なものを選びだすことができる．そのような特別な基底を用いることは必ずしも必要ではない，または望ましくないことさえあるが，しかし標準基底の存在を知っていることは重要である．少しの修正を除くと，定理 1 の証明で作った基底が標準基底である．

定理 2　基底 (ω_1, ω_2) で，比 $\tau=\omega_2/\omega_1$ が次の性質をみたすものがある：(i) $\mathrm{Im}\,\tau>0$, (ii) $-\dfrac{1}{2}<\mathrm{Re}\,\tau\leqq\dfrac{1}{2}$, (iii) $|\tau|\geqq1$, (iv) $|\tau|=1$ のときは．$\mathrm{Re}\,\tau\geqq0$. 比 τ はこの四つの条件で一意的に定まり，τ に対して基底は 2 組か 4 組かまたは 6 組のとり方がある．

証明　定理 1 の証明のように ω_1, ω_2 をとると，$|\omega_1|\leqq|\omega_2|$, $|\omega_2|\leqq|\omega_1+\omega_2|$, $|\omega_2|\leqq|\omega_1-\omega_2|$ である．τ を用いてこの条件をいいかえると，$|\tau|\geqq1$, $|\mathrm{Re}\,\tau|\leqq 1/2$ となる．$\mathrm{Im}\,\tau<0$ ならば (ω_1, ω_2) を $(-\omega_1, \omega_2)$ におきかえると，$\mathrm{Im}\,\tau>0$ になり $\mathrm{Re}\,\tau$ の条件には影響がない．$\mathrm{Re}\,\tau=-1/2$ ならば基底を $(\omega_1, \omega_1+\omega_2)$ におきかえ，$|\tau|=1$, $\mathrm{Re}\,\tau<0$ ならばそれを $(-\omega_2, \omega_1)$ におきかえる．これだけの修正をすれば，すべての条件はみたされる．

複素平面で条件 (i)〜(iv) を図示すると，図 7-2 で示した部分に点 τ が入っていることである．それは円周 $|\tau=1|$ と垂直な直線 $\mathrm{Re}\,\tau=\pm1/2$ で囲まれるが，境界上の点は太線の部分だけ含まれる．この集合は開集合ではないが，ユニモジュラー群の**基本領域**とよばれている．

基底の変換はユニモジュラー変換によることを前に見た．新しい比を τ' とすると，$ad-bc=\pm1$ として

(6)
$$\tau'=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

である．簡単な計算で

(7)
$$\operatorname{Im}\tau'=\frac{\pm\operatorname{Im}\tau}{|c\tau+d|^2}$$

となり，ここで符号±は $ad-bc$ の符号と同じになる．

τ と τ' がともに基本領域に入っていると仮定しよう．このとき，$\tau=\tau'$ になることを示そう．まず，条件(i)より(7)の±は＋になり，ゆえに $ad-bc=1$ である．次に，τ と τ' の役割は対称的でとりかえてもよいから，$\operatorname{Im}\tau'\geqq\operatorname{Im}\tau$ と仮定してかまわない．すると，(7)から $|c\tau+d|\leqq1$ となる．c と d が整数なので，この不等式が成立するのは限られた場合になる．

一つの場合として $c=0,\ d=\pm1$ がある．このときは，$ad-bc=1$ より $ad=1$ となり，a, d は整数だから，$a=d=1$ かまたは $a=d=-1$ である．(6)式は $\tau'=\tau\pm b$ となり，条件(ii)を用いると $|b|=|\operatorname{Re}\tau'-\operatorname{Re}\tau|<1$ である．b は整数だから $b=0$ で，$\tau'=\tau$ となる．

今度は $c\neq0$ と仮定しよう．条件 $|\tau+d/c|\leqq1/|c|$ から $|c|=1$ がいえる．何故なら，$|c|\geqq2$ とすると，点 τ は実軸からの距離が 1/2 以下となり，実軸に一番近い基本領域の点の実軸からの距離が $\sqrt{3}/2$ であることに反する．ゆえに，$|\tau\pm d|\leqq1$ となり，図7-2をみると，こうなるのは $d=0$ か $d=\pm1$ のときだけであることがわかる．点 $e^{2\pi i/3}$ は基本領域に入らないので，$|\tau+1|\leqq1$ は成り立たない．$|\tau-1|\leqq1$ は $\tau=e^{\pi i/3}$

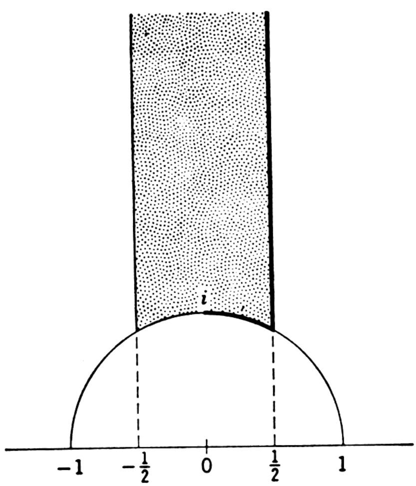


図 7-2　τ 平　　面

のときだけ成立する．このときは $|c\tau+d|=1$ となり，(7) から $\mathrm{Im}\,\tau'=\mathrm{Im}\,\tau$ で，基本領域の形から $\tau'=\tau$ をうる．

残ったのは，$d=0$, $|c|=1$ の場合だけである．条件 $|\tau|\leqq 1$ と (iii) から $|\tau|=1$ である．$bc=-1$ から $b/c=-1$ で $\tau'=\pm a-1/\tau=\pm a-\bar{\tau}$ となる．ゆえに，$\mathrm{Re}\,(\tau+\tau')=\pm a$ となり，(ii) からこれは $a=0$ のときだけ可能で，このとき $\tau'=-1/\tau$ となる．(iv) から $\tau=\tau'=i$ でなければならない．

τ が一意的であることが証明できた．標準基底 (ω_1, ω_2) はいつでも $(-\omega_1, -\omega_2)$ におきかえることができる．このほかに同じ τ をもつ基底があるのは，τ がユニモジュラー変換 (6) の不動点になるとき，そのときだけである．これは $\tau=i$ と $\tau=e^{\pi i/3}$ だけである；i は $-1/\tau$ の不動点で，$e^{\pi i/3}$ は $-(\tau+1)/\tau$ と $-1/(\tau+1)$ の不動点になっている．これが定理でいう基底が 4 組，6 組とれる場合である．

2.4. 楕円関数の一般的性質　以後，$f(z)$ は全平面の有理形関数で，(ω_1, ω_2) を基底とする加群 M に属する数をすべて周期にもつと仮定する．基底が標準基底であるとは仮定しないし，M が f の周期の全体になっているとも仮定しない．

z_1-z_2 が M に属するとき，すなわち $z_1=z_2+n_1\omega_1+n_2\omega_2$ となっているとき，z_1 と z_2 とは同値であるといって，$z_1\equiv z_2\ (\mathrm{mod}\ M)$ とかく．関数 f は同値な点では同じ値をとり，したがって，同値類の集合上の関数とみなしうる．具体的にはこの性質を用いて，頂点 $a, a+\omega_1, a+\omega_2, a+\omega_1+\omega_2$ の平行四辺形 P_a に関数 f を制限する．境界の適当な部分を P_a に含めることによって，各同値類を P_a のちょうど一点が代表し，P_a 上での値によって f は完全にきまってしまう．a のとり方は自由であって，例えば，P_a の境界上に f の極がないようにとれる．

定理 3　極をもたない楕円関数は定数だけである．

$f(z)$ が極をもたなければ，P_a の閉包で有界となり，したがって全平面で有界となる．リュウビルの定理（4 章 2.3 節）により，定数になってしまう．

極は集積点をもちえないので，P_a の中には極は有限個しかありえない．楕円関数の極(の集合)というとき，同値なものは同一視して互いに同値でない極の全体を考えることにする．重複度はいつもの方法で数えることにする．

定理 4　楕円関数の留数の和は0である．

P_a の境界上に極がないように a をとる．境界 ∂P_a を正の向きにとると，P_a 内の極における留数の和は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P_a} f(z)dz$$

に等しい．f は周期 ω_1, ω_2 をもつから，平行四辺形の向い合った辺の上の積分はそれぞれ消しあい，上記の積分は0になる．

この定理の系として，極が1個だけでそれが1位の極であるような楕円関数は存在しない．

定理 5　定数でない楕円関数は，極と零点を同じ個数だけもつ．

---

f の極と零点は f'/f の1位の極となり，f'/f はまた楕円関数である．重複度が f'/f の留数で，符号は零点のとき正，極のときは負となっている．ゆえに定理4から定理5は導かれる．

c を任意の定数とすると $f(z)-c$ の極は $f(z)$ の極と同じである．したがって，すべての値を同じ回数だけとることがわかる．方程式 $f(z)=c$ の同値でない根の個数を楕円関数の**位数**という．

定理 6　楕円関数の零点の全体を $a_1, \cdots, a_n$ とし極の全体を $b_1, \cdots, b_n$ とすると，$a_1+\cdots+a_n \equiv b_1+\cdots+b_n \pmod{M}$ が成り立つ．

証明には，P_a の境界上に f の零点も極もないように a をとり，積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P_a} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz \tag{8}$$

を考える．零点，極の同値類の代表を P_a の中にとっておけば，留数計算により(4章5.2節(49))，この積分は $a_1+\cdots+a_n-b_1-\cdots-b_n$ に等しい．a か

ら $a+\omega_1$ までの辺と $a+\omega_2$ から $a+\omega_1+\omega_2$ までの辺を考えよう．その上の積分は

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_a^{a+\omega_1}-\int_{a+\omega_2}^{a+\omega_1+\omega_2}\right)\frac{zf'(z)}{f(z)}dz=-\frac{\omega_2}{2\pi i}\int_a^{a+\omega_1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

となる．$-\omega_2$ を無視すると，右辺は z が a から $a+\omega_1$ まで動くときに $f(z)$ の描く閉曲線の原点のまわりの回転数を表わす．ゆえに整数である．他の向い合った二つの辺に対しても同様の計算ができる．ゆえに，(8) の値は $n_1\omega_1+n_2\omega_2$ の形になり，定理は証明できた．

3. ワイエルシュトラスの理論

楕円関数でもっとも簡単なのは位数 2 であり，それは留数 0 の 2 位の極を一つもつか，または 1 位の極を二つもち留数は互いに反対符号であるか，どちらかである．ワイエルシュトラスの古典的な例をみよう．彼は系統的な理論の出発点に 2 位の極をもつ関数を選んだ．

3.1. ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数（ペー関数）

原点を極としてよいし，定数倍は無視してよいから特異部は z^{-2} としてよい．f が楕円関数でこのような特異点を原点とそれに同値な点だけにもつとすると，f は偶関数になることがいえる．実際，$f(z)-f(-z)$ は同じ周期をもち特異点がなくなってしまう．ゆえに定数になるが，$z=\omega_1/2$ とおいて，この定数が 0 になることがわかる．

定数を加えることは自由だから，原点でのローラン展開の定数項を 0 にとれる．このように正規化しておくと $f(z)$ は一意的に定まり，これを特別な印刷記号を伝統的に用いて $\wp(z)$ とかく．ローラン展開は

$$\wp(z)=z^{-2}+a_1z^2+a_2z^4+\cdots\cdots$$

という形である．

ここまではみな仮定の上での話であり，この展開をもつ楕円関数が存在す

るかどうか，まだ示していない．このような場合の通常の手続き，すなわち存在を仮定し具体的な表示を求めることをする．手掛りは5章2節の方法で部分分数に展開することである．わそわれの目的は，公式

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\neq0}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right) \tag{9}$$

を証明することになる．ここで，$\sum$ は0を除くすべての $\omega=n_1\omega_1+n_2\omega_2$ について和をとる．$(z-\omega)^{-2}$ は ω での特異部であり，和が収束するように ω^{-2} を引いたということに気づいてほしい．

級数の収束を確かめるのが最初の仕事である．$|\omega|>2|z|$ と仮定すると，

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right|=\left|\frac{z(2\omega-z)}{\omega^2(z-\omega)^2}\right|\leqq\frac{10|z|}{|\omega|^3}$$

が直ちにえられる．ゆえに，

$$\sum_{\omega\neq0}\frac{1}{|\omega|^3}<\infty$$

がいえれば，級数 (9) は各コンパクト集合上で一様収束する．ω_2/ω_1 は実数でないから，すべての実数の組 (n_1, n_2) に対し $|n_1\omega_1+n_2\omega_2|\geqq k(|n_1|+|n_2|)$ をみたすような $k>0$ が存在する．整数だけを考えると，$|n_1|+|n_2|=n$ をみたす組 (n_1, n_2) は $4n$ 個ある．これから，

$$\sum_{\omega\neq0}|\omega|^{-3}\leqq4k^{-3}\sum_{1}^{\infty}n^{-2}<\infty$$

がいえる．

次の段階は，(9) の右辺が周期 ω_1, ω_2 をもつことを示すことである．直接に確かめるのはかなりやっかいである．代りに一時的に

$$f(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\neq0}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right) \tag{10}$$

とおき，項別微分すると

$$f'(z)=-\frac{2}{z^3}-\sum_{\omega\neq0}\frac{2}{(z-\omega)^3}=-2\sum_{\omega}\frac{1}{(z-\omega)^3}$$

をうる．最後の和は明らかに二重周期関数である．ゆえに，$f(z+\omega_1)-f(z)$ と

$f(z+\omega_2)-f(z)$ は定数になる．$f(z)$ は偶関数だから（(10)からわかる），$z=-\omega_1/2$ および $z=-\omega_2/2$ とおいてみれば，この定数が0になることがいえる．これで $f(z)$ が ω_1, ω_2 を周期にもつことが証明できた．

上記の条件をみたす $\wp(z)$ があるとすると，$\wp(z)-f(z)$ は定数になることがわかり，原点での展開式からその定数は0であることがいえる．これで，$\wp(z)$ の存在が証明でき，級数 (9) で表されることも証明できた．便利な参考として次の重要な式を掲げておく：

$$\wp'(z)=-2\sum\frac{1}{(z-\omega)^3}. \tag{11}$$

3.2. 関数 $\zeta(z)$ と $\sigma(z)$　$\wp(z)$ の留数は0だから，一価関数の導関数になっている．$\wp(z)$ の原始関数を伝統的に $-\zeta(z)$ とかき，それを奇関数になるように正規化しておく．(9) を用いて具体的な表示式

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum_{\omega\neq0}\left(\frac{1}{z-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2}\right) \tag{12}$$

をうる．この級数の収束は，$\dfrac{1}{z}$ の項は別として0から z まで極を通らない任意の曲線にそって積分することによりこの級数はえられたのだから，明らかである．

定数 η_1, η_2 があり，$\zeta(z+\omega_1)=\zeta(z)+\eta_1$, $\zeta(z+\omega_2)=\zeta(z)+\eta_2$ が明らかに成り立つ．η_1, η_2 は ω_1, ω_2 と簡単な関係で結ばれている．それを導くために，任意に $a\neq0$ をとり，留数の定理から

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P_a}\zeta(z)dz=1$$

となることに注意する．一方，この積分は平行四辺形 P_a の向いあった辺の上の積分を加えることにより計算でき，結局，**ルジャンドルの関係式**とよばれる

$$\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1=2\pi i$$

をうる．

$\zeta(z)$ の不定積分は多価になるので，多価性を消すためにそれの指数関数をとったものを計算する．直接容易に確かめられるように，

$$\sigma(z)=z\prod_{\omega\neq 0}\left(1-\frac{z}{\omega}\right)e^{z/\omega+\frac{1}{2}(z/\omega)^2} \tag{13}$$

は収束し整関数となり

$$\sigma'(z)/\sigma(z)=\zeta(z)$$

が成立する．(13)式は $\sigma(z)$ の基本乗積表示になっている．

z を $z+\omega_1$ または $z+\omega_2$ におきかえたときに，$\sigma(z)$ はどうかわるだろうか．

$$\frac{\sigma'(z+\omega_1)}{\sigma(z+\omega_1)}=\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}+\eta_1$$

から，直ちに定数 C_1 があり次の式をうる：

$$\sigma(z+\omega_1)=C_1\sigma(z)e^{\eta_1 z}.$$

定数をきめるためには，$\sigma(z)$ が奇関数であることに注意する．$z=-\omega_1/2$ とおくと C_1 の値をきめることができ，$\sigma(z)$ が次の式をみたすことがわかる：

$$\begin{aligned}\sigma(z+\omega_1)&=-\sigma(z)e^{\eta_1(z+\omega_1/2)}\\ \sigma(z+\omega_2)&=-\sigma(z)e^{\eta_2(z+\omega_2/2)}.\end{aligned} \tag{14}$$

問　題

1. ω_1, ω_2 を周期にもつ楕円関数で偶関数のものは，0 が零点でも極でもないと仮定すれば，

$$C\prod_{k=1}^{n}\frac{\wp(z)-\wp(a_k)}{\wp(z)-\wp(b_k)}\quad (C\text{ は定数})$$

とかけることを示せ．原点が零点か極になるときには，どんな形にかわるか．

2. ω_1, ω_2 を周期にもつ任意の楕円関数は

$$C\prod_{k=1}^{n}\frac{\sigma(z-a_k)}{\sigma(z-b_k)}\quad (C\text{ は定数})$$

という形でかけることを示せ．ヒント：(14)と定理6を用いる．

3.3. 微分方程式　(12) 式から $\zeta(z)$ の原点中心のローラン展開が容易

に求まり，それを微分すると $\wp(z)$ のローラン展開になる．まず，

$$\frac{1}{z-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2}=-\frac{z^2}{\omega^3}-\frac{z^3}{\omega^4}-\cdots$$

となり，すべての周期 ω について和をとると，

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}-\sum_{k=2}^{\infty}G_k z^{2k-1}$$

をうる．ここで，

$$G_k=\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^{2k}}$$

である．周期の奇数べきの対応する和は 0 になることに注意してほしい．これは ζ が奇関数であるから期待されることであった．さて，

$$\wp(z)=-\zeta'(z)$$

だから，

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=2}^{\infty}(2k-1)G_k z^{2k-2}$$

となる．

以後の計算では欲しい項だけをかく．省略した項は高次の項である：

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+3G_2z^2+5G_3z^4+\cdots$$

$$\wp'(z)=-\frac{2}{z^3}+6G_2z+20G_3z^3+\cdots$$

$$\wp'(z)^2=\frac{4}{z^6}-\frac{24G_2}{z^2}-80G_3+\cdots$$

$$4\wp(z)^3=\frac{4}{z^6}+\frac{36G_2}{z^2}+60G_3+\cdots$$

$$60G_2\wp(z)=\frac{60G_2}{z^2}+0+\cdots .$$

最後の三つの式から，

$$\wp'(z)^2-4\wp(z)^3+60G_2\wp(z)=-140G_3+\cdots$$

をうる．しかし，ここで左辺はまた二重周期関数であり，右辺は極をもたな

い．ゆえに，これから次の結論をうる：

$$\wp'(z)^2=4\wp(z)^3-60G_2\wp(z)-140G_3.$$

習慣的に，$g_2=60G_2$，$g_3=140G_3$ とおくと，この式は次のようになる．

$$\wp'(z)^2=4\wp(z)^3-g_2\wp(z)-g_3. \tag{15}$$

これは $w=\wp(z)$ に対する一階微分方程式である．これは直接に解ける．すなわち，

$$z=\int^w\frac{dw}{\sqrt{4w^3-g_2w-g_3}}+\text{定数}$$

となり，これは $\wp(z)$ が楕円積分の逆関数であることを示している．もっと正確にいうと，この関係は等式

$$z-z_0=\int_{\wp(z_0)}^{\wp(z)}\frac{dw}{\sqrt{4w^3-g_2w-g_3}}$$

で与えられる．ここで，積分の道は z_0 から z まで $\wp'(z)$ の零点と極をさけて結びそれを $\wp$ で写したものであり，平方根の符号は $\wp'(z)$ に実際に等しくなるようにとらねばならない．

楕円関数と楕円積分との関係については，長方形とある種の三角形の等角写像と関連してすでにふれたことがある（6章2節）．

***問　題**

ワイエルシュトラスの関数 $\wp(z)$, $\zeta(z)$, $\sigma(z)$ はいろいろな等式をみたし，練習問題としては最適である．それらは，同じ零点と極をもつ二つの楕円関数を比較するか（σ 関数を含むとき），または同じ特異部をもつ楕円関数を比べるか（$\wp$ 関数と ζ 関数だけを含むとき），それによって証明できる．次の一連の公式は，この方法を一度だけ使えばよいように順に並んでいる．

1.　(16)
$$\wp(z)-\wp(u)=-\frac{\sigma(z-u)\sigma(z+u)}{\sigma(z)^2\sigma(u)^2}.$$

（(14)を用いて右辺が z の二重周期関数であることを示す．ローラン展開を比べて定数因子をきめる）．

2.　(17)
$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(u)}=\zeta(z-u)+\zeta(z+u)-2\zeta(z).$$

（(16)を対数微分する）．

3. (18)
$$\zeta(z+u)=\zeta(z)+\zeta(u)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(z)-\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)}.$$

(これは(17)式を対称的にしたものである).

4. $\wp$ 関数の加法定理：

(19)
$$\wp(z+u)=-\wp(z)-\wp(u)+\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)}\right)^2.$$

((18)を微分すると $\wp''(z)$ を含んだ式になる. (15) から $\wp''=6\wp^2-\frac{1}{2}g_2$ となり，これで $\wp''$ を消去できる．対称化して (19) をうる). $\wp'(z)$, $\wp'(u)$ は $\wp(z)$, $\wp(u)$ の代数的な式でかけるから，これは代数的加法定理であることに注意せよ.

5. 次の式を証明せよ：
$$\wp(2z)=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2-2\wp(z).$$

6. $\wp'(z)=-\sigma(2z)/\sigma(z)^4$ を証明せよ.

7. 次の式を証明せよ：
$$\begin{vmatrix} \wp(z) & \wp'(z) & 1 \\ \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(u+z) & -\wp'(u+z) & 1 \end{vmatrix}=0.$$

3.4. モジュラー関数 $\lambda(\tau)$　多項式 $4w^3-g_2w-g_3$ の根を e_1, e_2, e_3 とすると，微分方程式(15)はまた次のようにかける：

(20)
$$\wp'(z)^2=4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3).$$

e_k の値を見つけるために，$\wp'(z)$ の零点を求める．$\wp(z)$ の周期性と偶関数ということより，$\wp(\omega_1-z)=\wp(z)$ である．ゆえに，$\wp'(\omega_1-z)=-\wp'(z)$ で，これから $\wp'(\omega_1/2)=0$ をうる．同様にして，$\wp'(\omega_2/2)=0$ でまた $\wp'((\omega_1+\omega_2)/2)=0$ である．$\omega_1/2, \omega_2/2, (\omega_1+\omega_2)/2$ は周期に関して互いに同値ではない．ゆえに，3 位の楕円関数である $\wp'(z)$ の零点はこれで全部であり，これらはすべて 1 位の零点である．(20)と比べると，次のようにおくことができる：

(21)
$$e_1=\wp(\omega_1/2),\ e_2=\wp(\omega_2/2),\ e_3=\wp((\omega_1+\omega_2)/2).$$

さらにこれは非常に重要なことであるが，これらの 3 根はすべて相異なることがわかる．実際，$\wp(z)$ は各 e_k を重複度 2 でとるので，もしそれらの二つが一致したとするとその値を 4 回とることになり，$\wp$ が位数 2 に反する.

$z=\omega_1/2,\ \omega_2/2,\ (\omega_1+\omega_2)/2$ を $\wp(z)$ の定義式 (9) に代入すると，各 e_k は ω_1, ω_2 の -2 次の同次式であることがわかる．(いいかえると，ω_1, ω_2 を t 倍すると e_k は t^{-2} 倍される)．ゆえに，

$$\lambda(\tau)=\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2} \tag{22}$$

とおくと，これは比 $\tau=\omega_2/\omega_1$ によってきまる*．(それで τ の関数として，$\lambda(\tau)$ という記号を用いた)．(9)から明らかなように，$\lambda(\tau)$ は上半平面 $\mathrm{Im}\,\tau>0$ で解析的な二つの関数の商である．$e_1\neq e_2$ なので，有理形というよりは解析関数になっている；$e_2\neq e_3$ だから零点をもつことはなく，$e_1\neq e_3$ だから 1 に等しくなることも決してない．

τ のどんな関数になっているか，もっとくわしく調べよう．ω_1, ω_2 がユニモジュラー変換

$$\omega_2'=a\omega_2+b\omega_1,\quad \omega_1'=c\omega_2+d\omega_1 \tag{23}$$

をうけると，まず，$\wp$ 関数はかわらない．したがって (20) をみると，根 e_k は高々置換をうけるだけである．実際にどうなるかを見たい．(23)から明らかに，もし $a\equiv d\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$, $b\equiv c\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$ ならば，$\omega_1'/2\equiv\omega_1/2$, $\omega_2'/2\equiv\omega_2/2$ である．このときは，e_k は全然かわらず，次のことがわかった：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ (\mathrm{mod}\ 2) \text{ のとき，} \lambda\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\lambda(\tau). \tag{24}$$

(24)の条件の合同式をみたす変換の全体はモジュラー群 (2.2節参照)の部分群をなし，2を法とする合同部分群という．(24) は $\lambda(\tau)$ がこの部分群に関して不変であることを示している．一般に，一次変換の群に関し不変な解析関数または有理形関数を**保形関数**という．とくに，モジュラー群の部分群に関する保形関数を**モジュラー関数**(または**楕円モジュラー関数**)という．

まだ合同部分群に属さないモジュラー変換に対し $\lambda(\tau)$ がどう動くか調べなければならない．2を法として $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ にそれぞれ合同な行列を考えれば十分である．というのは，他の型の行列はこれらから合成されるから．

---

*) (訳注) 今後は常に $\mathrm{I_m}\ \omega_2/\omega_1>0$ とし，変換(23)としては行列式正のものだけを考える．

最初の場合は，$\omega_2'/2=(\omega_1+\omega_2)/2$, $\omega_1'/2=\omega_1/2$ である；これは e_2 と e_3 がいれかわり，e_1 はかわらないことを意味する．ゆえに，λ は $(e_2-e_3)/(e_1-e_3)=\lambda/(\lambda-1)$ にかわる．後者の場合は，$\omega_2'/2=\omega_1/2$, $\omega_1'/2\equiv\omega_2/2$ となり e_1 と e_2 がいれかわり，λ は $1-\lambda$ にかわる．見本にとった変換は $\tau\to\tau+1$ と $\tau\to-1/\tau$ であるから，$\lambda(\tau)$ は次の関数等式をみたすことがわかった：

$$\lambda(\tau+1)=\frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1},\quad \lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right)=1-\lambda(\tau). \tag{25}$$

3.5. $\lambda(\tau)$ による等角写像　簡単のために，これからは $\omega_1=1$, $\omega_2=\tau$ としておく．こうすると (9) と(21)から

$$\begin{aligned} e_3-e_2&=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\left(m-\frac{1}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\right)^2}-\frac{1}{\left(m+\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau\right)^2}\right] \\ e_1-e_2&=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\left(m-\frac{1}{2}+n\tau\right)^2}-\frac{1}{\left(m+\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau\right)^2}\right] \end{aligned} \tag{26}$$

となり，ここでこの二重級数は絶対収束する．まず最初に，τ が純虚数のときにこれらの量は実数になることを見よう(各 e_k もそうなる)．τ を $-\tau$ におきかえると項の順番がかわるだけで和は同じである．ゆえに虚軸上で $\lambda(\tau)$ が実数値をとることがいえる．

$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ は 2 を法とする合同部分群に入るから，$\lambda(\tau+2)=\lambda(\tau)$ である．いいかえると λ は周期 2 をもつ．2 節で見たように，$\lambda(\tau)$ は $e^{\pi i\tau}$ の関数として表わされることになる．フーリエ展開を求めることも難しくはないが，ここでは，$\mathrm{Im}\,\tau\to\infty$ のときに $\lambda(\tau)\to 0$ を示すだけに止めよう．

(26)を計算するために，まず m に関して和をとる．この和は，公式

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-m)^2}\quad (5\text{章}\quad 2.1\text{節}(9))$$

を用いればきちんと求めうる．直ちに次の式をうる：

$$(27)\qquad \begin{aligned} e_3-e_2&=\pi^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\cos^2\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau}-\frac{1}{\sin^2\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau}\right)\\ e_1-e_2&=\pi^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\cos^2\pi n\tau}-\frac{1}{\sin^2\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau}\right).\end{aligned}$$

$|\cos n\pi\tau|$ と $|\sin n\pi\tau|$ は $e^{|n|\pi \mathrm{Im}\tau}$ と比較できるので，$n\to+\infty$のときも $n\to-\infty$のときもこの級数の収束は早い；$\mathrm{Im}\,\tau\geqq\delta>0$ で一様収束である．

ここで極限は項毎にとることができ，$e_3-e_2\to0$, $e_1-e_2\to\pi^2$ ($n=0$ の項からでてくる)となる．ゆえに，$\mathrm{Im}\,\tau\to\infty$のとき $\lambda(\tau)\to0$ であり，τ の実部に関して一様収束である．(25)の2番目の式から，虚軸にそって τ が0に近づくとき $\lambda(\tau)\to1$ がいえる．

もう少し情報が必要である；すなわち，$e^{\pi i\tau}$ の関数とみて $\lambda(\tau)$ が0になるその位数が知りたい．(27) から e_3-e_2 の最初の項は $n=0$ と $n=1$ に対応する項である．これらの項の和は

$$2\pi^2\left[\frac{4e^{\pi i\tau}}{(1+e^{\pi i\tau})^2}+\frac{4e^{\pi i\tau}}{(1-e^{\pi i\tau})^2}\right]$$

であり，ゆえに $\mathrm{Im}\,\tau\to\infty$ のとき

$$(28)\qquad \lambda(\tau)e^{-\pi i\tau}\to16$$

となる．

図7-3において，領域 Ω は虚軸と直線 $\mathrm{Re}\,\tau=1$ と円周 $|\tau-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$で囲まれた領域である．変換 $\tau+1$ は虚軸を $\mathrm{Re}\,\tau=1$ の上に写し，変換 $1-1/\tau$ は $\mathrm{Re}\,\tau=1$ を $|\tau-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$ の上へ写す．$\lambda(\tau)$ は虚軸上で実数値をとるから，(25) の関係から Ω の境界全体で実数値をとることがわかる．さらに，Ω の内側から $\tau\to0$ のとき $\lambda(\tau)\to1$ であり，$\tau\to1$の

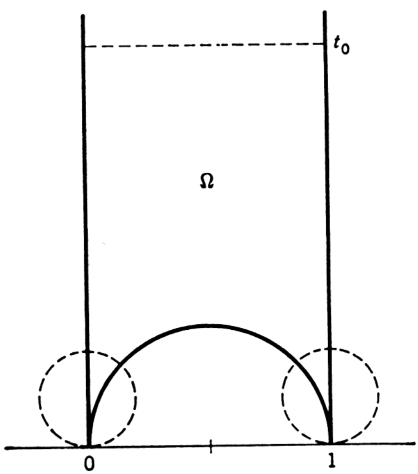


図 7-3

とき $\lambda(\tau)\to\infty$ である．

実数でない値 w_0 に対し，Ω で $\lambda(\tau)$ が何回 w_0 を値にとるかを求めるために，偏角の原理を用いよう．Ω の端を水平な線分 $\mathrm{Im}\tau=t_0$ とそれの変換 $-1/\tau$, $1-1/\tau$ による像で切断する．(この像は実軸に接する円である．) 十分大きな t_0 に対しては，切りはなした部分では $\lambda(\tau)\neq w_0$ であることは明らかである．$\tau=1$ の近くで切りはなした円周は，$\lambda(\tau)$ によって曲線 $\lambda=\lambda(1-1/\tau)=1-1/\lambda(\tau)$ に写る；ここで，$\tau=s+it_0$, $0\leqq s\leqq 1$ である；(28)をみると，これは近似的に上半平面にある大きな半円周である．これで明らかに，Ω の端を切りはなした領域の境界の像の w_0 のまわりの回転数は，$\mathrm{Im}\,w_0>0$ のとき 1 で，$\mathrm{Im}\,w_0<0$ のとき 0 である．ゆえに，$\lambda(\tau)$ は上半平面のすべての値を Ω でちょうど一回だけとり，下半平面の値は決してとらない．これからまた，Ω の境界上で $\lambda(\tau)$ が単調であることが保証される．実際，もしそうでないならば，$\lambda'(\tau)$ が境界の一点で 0 になるはずで，その境界点を中心とする半円が上半平面へ写るのだからこれは不可能である．

定理 7　モジュラー関数 $\lambda(\tau)$ は Ω から上半平面の上への 1 対 1 等角写像を与える．この写像は境界上まで連続に延長され，$\tau=0, 1, \infty$ がそれぞれ $\lambda=1, \infty, 0$ に対応する．

鏡像によって，虚軸に関し Ω に対称な領域 Ω' は下半平面の上へ写され，ゆえに，両者をあわせた領域は，0 と 1 を除いた全平面に対応する．

また，次のことを証明しよう ($\bar{\Omega}$ は上半面に関する Ω の閉包)：

定理 8　上半平面の各点 τ は，2 を法とする合同部分群に関し，$\bar{\Omega}\cup\Omega'$ のちょうど一点に同値である．

図7-4を参照してほしい．領域 Δ が一次変換 τ, $-1/\tau$, $\tau-1$, $1/(1-\tau)$, $(\tau-1)/\tau$, $\tau/(1-\tau)$ によって，図において影をつけた領域に写ることを，読者は確かめてほしい．この一次変換を $S_1, S_2, \cdots, S_6$ とかく．逆変換 S_k^{-1} の行列は，この順で

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

である．任意のユニモジュラー行列がこれらのちょうど一つに2を法として合同であるという意味で，これらの行列は互いに合同でない行列の完全系を作っている．まったく同様のことが，Δ' を図の影をつけていない領域の上へ写す変換 $S_k'(k=1, 2, \cdots, 6)$ に対しても示しうる(それらを書きあげる仕事は読者にまかす)．$\bar{\Delta}$ と $\bar{\Delta}'$ の12個の像をあわせると $\bar{\Omega}\cup\bar{\Omega}'$ をおおう(閉包は，上半平面 $\mathrm{Im}\,\tau>0$ を全空間とみてそこで閉包をとる)．

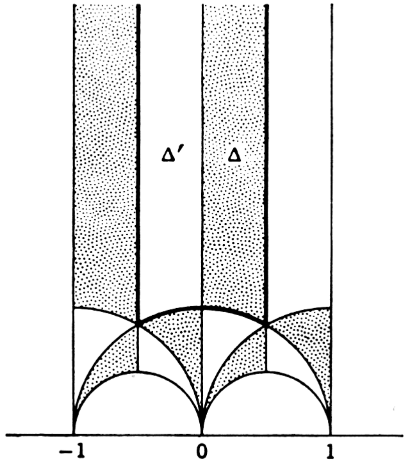


図 7-4　$\lambda(\tau)$ の基本領域

τ を上半平面の任意の点としよう．$\bar{\Delta}\cup\bar{\Delta}'$ は図7-2の影をつけた部分の閉包と同じである．ゆえに，定理2によりモジュラー変換 S があり $S\tau\in\bar{\Delta}\cup\bar{\Delta}'$ とできる．まず，$S\tau\in\bar{\Delta}$ と仮定しよう．S の行列は2を法として一つの行列 S_k^{-1} と合同になることがわかっている．ゆえに，$T=S_kS$ の行列は単位行列と合同である；いいかえると，T は合同部分群に属する．$S\tau\in\bar{\Delta}$ だから，$T\tau=S_k(S\tau)\in\bar{\Omega}\cup\bar{\Omega}'$ である．$S\tau\in\bar{\Delta}'$ のときも同様である．ゆえに，いつでも一つの $T\tau$ は $\bar{\Omega}\cup\bar{\Omega}'$ に入り，それを $\bar{\Omega}\cup\Omega'$ にとりうることは明らかである．

一意性は S_k が互いに合同でなく，S_k' もそうであることから容易にいえる．詳細は読者にまかせよう．

***問　題**

1.　関数

$$J(\tau)=\frac{4}{27}\cdot\frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$$

は，全モジュラー群に関して保形関数であることを示せ．$J(\tau)=0, 1$ となる点はどこで，重複度はいくらか．さらに，

$$J(\tau)=\frac{-4(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)^3}{(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2}$$

を示せ．また，$J(\tau)$ は図7-4の領域 Δ を半平面の上へ写すことを示せ．

第8章　大域的解析関数

1．解析接続

これまでの章では，関数はすべて明確に定義されておらねばならず，したがって一価関数にかぎることを強調してきた．$\sqrt{z}$ や $\log z$ のようにその解析的表示によっては一意的にきまらない関数の場合には，都合の良い状況のもとで一価な枝を選びうることを示すのに，特別な努力が必要であった．これは論理的明解性の要求には答えるが，平方根や対数の多価性が無視できない本質的な特徴であるということを，正当に取り扱っていない．したがって，多価性を回避するよりはむしろ強調する概念が明らかに必要である．

1.1．ワイエルシュトラスの理論　幾何学的な見方を好むリーマンとはちがって，ワイエルシュトラスは解析関数の全理論を整級数の概念から構成しようとした．彼にとって基本的な建築材料は，収束半径 $r(P)$ が正の整級数

$$P(z-\zeta)=a_0+a_1(z-\zeta)+\cdots+a_n(z-\zeta)^n+\cdots$$

であった．そのような級数は，中心とよばれる複素数 ζ と複素数の係数列 $\{a_n\}_0^\infty$ によってきまる．収束半径はアダマールの公式 $r(P)^{-1}=\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{1/n}$ によって与えられる．$r(P)>0$ というのが本質的な要求であり，このときだけこの整級数が円板 $D=\{z\,;|z-\zeta|<r(P)\}$ において解析関数 $f(z)$ を定義するからである．

1点 $\zeta_1\in D$ をとると，$f(z)$ は ζ_1 を中心とする整級数 $P_1(z-\zeta_1)$ にテイラー展開される．それは円板 D_1 で収束し，その半径 $r(P_1)$ は $r(P)-|\zeta_1-\zeta|$ 以上で，本当に大きくなることもある．この新しい級数は D_1 で解析関数 $f_1(z)$

を定義するが，これは$f(z)$から**直接解析接続**でえられたという．fとf_1は共通部分$D\cap D_1$で等しいから，fとf_1はいっしょにして$D\cup D_1$で一つの解析関数を定義する．D_1がDに含まれなければ，新しい関数はより大きな領域へのfの延長となっており，それがこの構成の目的である．

この方法は何回でもくりかえすことができる．一般に，次々に直接解析接続をして，整級数の列$P_0(z-\zeta_0)$, $P_1(z-\zeta_1)$, …, $P_n(z-\zeta_n)$をえたとしよう．P_kは円板D_kで収束し解析関数f_kを定義し，D_kの中心ζ_kは$\zeta_k\in D_{k-1}$で，$D_{k-1}\cap D_k$では$f_{k-1}=f_k$である．このとき，f_0, f_1, …, f_nが$D_0\cup\cdots\cup D_n$で一価関数を定義するとは限らない．というのは，D_kが$k-1$, $k+1$とは異なるhに対しD_hと交わったときに，$D_k\cap D_h$において$f_k=f_h$となる保証はない．定義域の各点にただ一つの値だけが対応するという厳密な意味での関数概念をひろげるのは，まさにこの可能性のためである．

上記のような整級数の列P_0, P_1 …, P_nが存在するとき，P_nはP_0の**解析接続**であるという．ワイエルシュトラスは，$P_0(z-\zeta_0)$から解析接続によってえられる整級数$P(z-\zeta)$の全体を考えた．この整級数の集合を，**ワイエルシュトラスの意味での解析関数**という．

ある整級数がもう一つの整級数の解析接続であるという性質は，明らかに同値関係である．ワイエルシュトラスの意味の解析関数は，この同値関係による同値類にほかならず，最初の級数P_0はその同値類の中で特別な地位をしめるわけではない．同じ類に属する二つの整級数は，同じ関数の別の外見であるというのが，根底となる考えである．

1.2. 芽と層　ワイエルシュトラスの理論は，大部分は歴史上の興味しかない．というのは，整級数とその収束域にかぎることは益よりも害の方が多いからである．しかし，いまでもワイエルシュトラスの思想が，複素解析関数論における多価性の理解の基礎であることは，おぼえておくべきである．

ここではもっと直接的な方法を概説しよう．それは，最近の多変数解析関数論を支配している，いささか作為的な考え方にそっている．この本の範囲はかぎられているので，術語のいくつかを甘んじて借用し，証明を簡単にす

るのに用いよう.

領域 Ω で定義された解析関数を**関数要素**といい，(f, Ω) とかく．大域的な解析関数は，互いにある定まった方法で関連し合っている関数要素の集りとして定義される.

二つの関数要素 $(f_1, \Omega_1), (f_2, \Omega_2)$ が互いに**直接解析接続**であるというのは，$\Omega_1 \cap \Omega_2$ が空集合でなくそこで $f_1(z)=f_2(z)$ となっていることである．もっとはっきりいうと，このとき (f_2, Ω_2) は (f_1, Ω_1) の領域 Ω_2 への直接解析接続という．Ω_2 への直接解析接続は存在するとはかぎらないが，もし存在すれば一意的に定まる．何故なら，$(f_2, \Omega_2), (g_2, \Omega_2)$ を (f_1, Ω_1) の二つの直接解析接続としよう．$\Omega_1 \cap \Omega_2$ で $f_2=g_2$ となり，Ω_2 は連結だから Ω_2 全体で $f_2=g_2$ となる．$\Omega_2 \subset \Omega_1$ のときには，(f_1, Ω_1) の Ω_2 への直接解析接続は (f_1, Ω_2) であることを，注意しておく.

整級数の場合と同様に，列 $(f_1, \Omega_1), (f_2, \Omega_2), \cdots, (f_n, \Omega_n)$ があり (f_k, Ω_k) と (f_{k+1}, Ω_{k+1}) が直接解析接続に互いになっているときに，(f_n, Ω_n) は (f_1, Ω_1) の**解析接続**であるという．これは同値関係になっており，同値類を**大域的解析関数**という．印刷上の工夫として，関数要素 (f, Ω) によってきまる大域的解析関数を肉太の活字 $\boldsymbol{f}$ でかくことにする．より柔軟な用語として，(f, Ω) を $\boldsymbol{f}$ の**枝**ということもある．(f, Ω) は一意的に $\boldsymbol{f}$ をきめるが，逆はいえない；同じ Ω の上で，$\boldsymbol{f}$ はいくつかの枝をもつことがある.

大域的解析関数はワイエルシュトラスの意味の解析関数と同一視できることは明らかであり，ほとんど何も一般につけ加えていない．しかし，ここにもっと実りの多い考え方がある．組 (f, Ω) の代りに，点 ζ と ζ で解析的な関数 f との組 (f, ζ) を考える．ここで，ζ で解析的とは，ζ を含むある開集合で定義されそこで解析的なことである．二つの組 $(f_1, \zeta_1), (f_2, \zeta_2)$ は，$\zeta_1=\zeta_2$ で ζ_1 のある近傍において $f_1=f_2$ となっているとき，同値であるという．これは，明らかに同値関係になっている．同値類を**芽 (germ)**，またはもっと明確に**解析関数芽**という．芽に対し点 ζ は一意的に定まるが，それを芽の**射影**という．射影 ζ をもつ芽を表すのに，$\boldsymbol{f}_\zeta$ という記号を用いる．関数要素 (f, Ω) は，各点 $\zeta \in \Omega$ において芽 $\boldsymbol{f}_\zeta$ を定める；逆に，各 $\boldsymbol{f}_\zeta$ はある

(f,Ω) から定まる．

芽 $\boldsymbol{f}_\zeta$ は対応する収束整級数 $P(z-\zeta)$ と同一視できることに，読者はもちろん気づくであろう．われわれは，出発点にもどったのである．しかし，芽の概念を導入することにより，収束整級数の本質的な性質を分離したのである．つまり，同じ中心をもつ二つの整級数が等しいのは，中心のある近傍で同じ関数を表しているとき，そのときだけである．この考え方をすると，他の関数についても同様に芽を考えることができるだろう．例えば，連続関数の芽とか C^k 級関数の芽などが考えられる．それらに対しては整級数による同値関係は定義できない．われわれは主に解析関数の芽に興味があるのだけれども，少し一般的な立場をとることにしよう．

D を複素平面の開集合とする．芽 $\boldsymbol{f}_\zeta$ で $\zeta\in D$ となるものの全体の集合を D 上の**層**という；それを $\mathfrak{S}$ または $\mathfrak{S}_D$ とかく．解析関数芽を扱っているので，**D 上の解析関数芽の層**という．$\boldsymbol{f}_\zeta$ に ζ を対応させる写像 $\pi:\mathfrak{S}\to D$ があり射影という．$\zeta\in D$ に対し，原像 $\pi^{-1}(\zeta)$ を ζ の上の茎といい，$\mathfrak{S}_\zeta$ とかく．

集合 $\mathfrak{S}$ は二重の構造をもっているので興味深い．それは位相的構造と代数的構造である．まず，$\mathfrak{S}$ に位相を入れ位相空間にでき，連続写像ということばを用いうる．次に，$\boldsymbol{f}_\zeta+\boldsymbol{g}_\zeta, \boldsymbol{f}_\zeta\cdot\boldsymbol{g}_\zeta$ の意味は明らかだから，各々の茎に明らかな代数的構造が入る．簡単のために，加法だけ注目しよう．この点からみると，茎はアーベル群になる．

全く一般的な定義の用意ができた．

定義1　D 上の**層** (**sheaf**) とは，次の性質をみたす位相空間 $\mathfrak{S}$ と写像 $\pi:\mathfrak{S}\to D$ のことである：

(i)　写像 π は局所位相的である；この意味は，各 $s\in\mathfrak{S}$ が次のような開近傍 Δ をもつこと．$\pi(\Delta)$ は開集合になり，π の Δ への制限は Δ から $\pi(\Delta)$ の上への1対1位相写像になる．

(ii)　各 $\zeta\in D$ に対し，茎 $\pi^{-1}(\zeta)=\mathfrak{S}_\zeta$ はアーベル群の構造をもつ．

(iii)　群の作用は $\mathfrak{S}$ の位相に関し連続である．

本当は D は任意の位相空間でよいが，われわれは D が複素平面の開集合のときを考える．また，アーベル群というところを，ほかの代数的構造におきかえることもできる．

さて，解析関数芽の層 $\mathfrak{S}$ が定義1の条件をみたすことを確かめよう．そのために，まず，$\mathfrak{S}$ に位相を入れなければならない．$\mathfrak{S}$ を距離空間にするのはやっかいであり，また不必要である．その代りに，$\mathfrak{S}$ の部分集合で開集合になるものをきめればよい．開集合を次のように定義する：$V\subset\mathfrak{S}$ が開集合になるのは，各 $s_0\in V$ に対し次の条件をみたす関数要素 (f,Ω) が存在するときである．(1) $\pi(s_0)=\zeta_0\in\Omega$, (2) (f,Ω) が ζ_0 で定める芽が s_0 である，(3) すべての $\zeta\in\Omega$ で (f,Ω) の定める芽 $\boldsymbol{f}_\zeta$ はすべて V に属する．このように開集合を定めたとき，3章定義8の条件を確かめるのは容易であろう．

上のように s_0, (f,Ω) をとり，(f,Ω) により定まる芽 $\boldsymbol{f}_\zeta$ の全体の集合を Δ とする．開集合のわれわれの定義より，Δ が s_0 の開近傍になり写像 $\pi:\Delta\to\Omega$ が位相写像になることは明らかである．条件(ii)は証明不要であろう．条件(iii)も容易だが内容を理解するのは重要である．加減は同じ茎に属する芽の間でだけ意味をもっている．証明には減法を考えれば十分である．$\pi(s_0)=\pi(s_0')=\zeta_0$ をみたす二つの芽 s_0, s_0' を考える．それらは，関数要素 $(f,\Omega), (g,\Omega)$ によって $\zeta_0\in\Omega$ で定められるとしよう；簡単のために，両者に共通の Ω をとった．$s\in\Delta_0$, $s'\in\Delta_0'$, $\pi(s)=\pi(s')=\zeta$ とすると，$s-s'$ は ζ で $(f-g,\Omega)$ が定める芽である．ζ が Ω の上を動けば，$s-s'$ は s_0-s_0' の近傍 Δ の上を動く；なおまた，$\pi(s-s')=\pi(s)=\pi(s')$ である．射影は $\Delta, \Delta_0, \Delta_0'$ のそれぞれと Ω の間の位相写像となる．ゆえに，s_0-s_0' の近傍をあらかじめ与えたときに，Δ_0, Δ_0' を小さくして Δ がその近傍に含まれるようにできることは明らかで，これは減法の連続性を示している．

1.3. 断面とリーマン面　$\mathfrak{S}$ を D 上の層とし，$U\subset D$ を開部分集合とする．連続写像 $\varphi: U\to\mathfrak{S}$ で合成写像 $\pi\circ\varphi$ が U の恒等写像になるようなものを，U 上の**断面 (section)** という．この条件から $\varphi(\zeta_1)=\varphi(\zeta_2)$ なら $\zeta_1=\zeta_2$ となる；ゆえに，φ は1対1となり，φ の逆写像は π を $\varphi(U)$ に制

限したものである．したがって，断面は位相写像である．

各 $s_0 \in \mathfrak{S}$ は，ある断面の像 $\varphi(U_0)$ に含まれる；$\varDelta$ を(ii)で存在が仮定されている近傍とし，$U_0 = \pi(\varDelta)$ とおき，φ は π を $\varDelta$ に制限したものの逆写像とすればよい．

U をきめたとき，U 上の断面の全体を $\Gamma(U, \mathfrak{S})$ とかく．これは空集合でなければアーベル群の構造をもつ．というのは，$\zeta \in U$ に $\varphi(\zeta) - \psi(\zeta)$ を対応させると断面になり，これで $\varphi - \psi$ を定義できるからである．茎 $\mathfrak{S}_\zeta$ の零元を 0_ζ とかき，$\omega(\zeta) = 0_\zeta$ とおいて写像 ω を定義する．ω は連続であり，したがって断面になることを示そう；これは零断面とよばれ，群 $\Gamma(U, \mathfrak{S})$ の零元である．

連続性を示すために，点 $\zeta_0 \in U$ と $s_0 \in \mathfrak{S}_{\zeta_0}$ をとる(例えば，$s_0 = 0_{\zeta_0}$ でもよい)．前述のように，s_0 はある $\varphi(U_0)$ に含まれる．条件(iii)により，$\varphi - \varphi = \omega$ は U_0 では連続である．ζ_0 は任意だから，ω は U 全体で連続となり断面である．零断面はつねに存在するから，$\Gamma(U, \mathfrak{S})$ は空集合でないこともわかった．以後，零断面を 0 とかく．

U が連結ならば，$\varphi, \psi \in \Gamma(U, \mathfrak{S})$ に対し，φ と ψ は恒等的に等しいか，または $\varphi(U)$ と $\psi(U)$ は共通点をもたないか，そのどちらかである．何故なら，$\varphi - \psi = 0$ をみたす点の集合も，$\varphi - \psi \neq 0$ の点の集合も，ともに開集合となるからである．

公理にもとづくやり方を示すために，少しくわしく議論を進めてきた．解析関数芽の層のときだけなら，多少は自明になる．この場合は，$\Gamma(U, \mathfrak{S})$ は U 上の（一価）解析関数の加法群と解釈できる．零断面は定数 0 にほかならない．

今後は，$\mathfrak{S}$ は全複素平面上の解析関数芽の層をつねに表すものとする．位相空間とみての $\mathfrak{S}$ の成分が，大域的解析関数と同一視できる(成分については，3章1.3節定理4参照)．これを証明するために，$s_0 \in \mathfrak{S}$ を関数要素 (f_0, Ω_0) できまる芽とし，(f_1, Ω_1) を (f_0, Ω_0) の直接解析接続とする；ここで，Ω_0, Ω_1 は連結と仮定されていることに注意する．$\Omega_0 \cap \Omega_1$ で $f_0 = f_1$ だから，この二つの関数要素によってきまる芽の集合 $\varDelta_0$ と $\varDelta_1$ は共通部分をもつ．Ω_0,

Ω_1 の位相写像による像として Δ_0, Δ_1 は連結であるから $\Delta_0 \cup \Delta_1$ も連結になる．ゆえに，(f_0, Ω_0) から直接解析接続を次々と行ってえられる関数要素は，s_0 を含む $\mathfrak{S}$ の成分 $\mathfrak{S}_0$ に属する芽を生じる．逆に，(f_0, Ω_0) の解析接続 (f, Ω) によってきめうる芽の全体を $\mathfrak{S}_0'$ とすると，$\mathfrak{S}_0' \subset \mathfrak{S}_0$ である．$\mathfrak{S}_0'$ と $\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{S}_0'$ が開集合であることはすぐにわかる．ゆえに，$\mathfrak{S}_0' = \mathfrak{S}_0$ となり，$\mathfrak{S}_0$ は一つの大域的解析関数 $\boldsymbol{f}$ に属する芽の全体と，ちょうど一致することがいえた．

このように同一視できるにもかかわらず，$\mathfrak{S}_0$ を大域的解析関数 $\boldsymbol{f}$ の定義域とみなす方が示唆に富んでいる．関数 $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{f}_\zeta$ でとる値は，その芽に対応する整級数の定数項にほかならない．こう解釈して，$\mathfrak{S}_0$ を $\boldsymbol{f}$ の**リーマン面**という．これは3章4.3節で簡単に学んだ初等リーマン面と全く同様であり，同じ目的，すなわち $\boldsymbol{f}$ を一価関数にすることに役立っている．$\mathfrak{S}_0$ を平面上に層をなしてひろがっているものとして想像することができ，もしそういう言葉を使いたいのなら，シートとは断面の像のことである．まだ，分岐点は含ませていないことを注意しておく．分岐点の役割はのちに述べる．

より明瞭にするために，大域的解析関数 $\boldsymbol{f}$ のリーマン面を $\mathfrak{S}_0(\boldsymbol{f})$ とかく．二つの大域的関数 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ が与えられ，写像 $\theta : \mathfrak{S}_0(\boldsymbol{f}) \to \mathfrak{S}_0(\boldsymbol{g})$ で (1) $\pi \circ \theta = \pi$, (2) θ は局所位相写像　という条件をみたすものがあるとしよう．この情況の下で，$\boldsymbol{g} \circ \theta$ は $\mathfrak{S}_0(\boldsymbol{f})$ 上の一価関数である．ふつうは記号を簡単にして，$\boldsymbol{g} \circ \theta$ の代りにそれを $\boldsymbol{g}$ とかいてしまう．この方法で，$\boldsymbol{f}$ のリーマン面上で導関数 $\boldsymbol{f}', \boldsymbol{f}'', \cdots$ がすべて定義できる．整関数 h はすべて自動的に任意の $\mathfrak{S}_0(\boldsymbol{f})$ の上で定義できるし，もし $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \cdots$ が $\mathfrak{S}_0(\boldsymbol{f})$ 上で定義されておれば，その多項式 $G(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \cdots)$ もそうなる．

関数関係の保存性として知られる古典的な原理がある．関数要素 (f, Ω), (g, Ω), (h, Ω), $\cdots$ は，(f, Ω) が直接接続または直接接続の列によって接続できるときはいつでも接続可能であると仮定する．さらに Ω において $G(f, g, h, \cdots) = 0$ をみたすとしよう．そのとき，同じ式がすべての解析接続に対して成り立ち，これは $G(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \cdots) = 0$ とかいてよい．とくに，一つの芽が G を多項式として微分方程式 $G(z, f, f', \cdots, f^{(n)}) = 0$ をみたすならば，大域

的関数 f も同じ方程式をみたす.

1.4. 曲線にそう解析接続　$\gamma:[a,b]\to C$ を複素平面内の曲線とする. 大域的解析関数 f と, 全解析関数芽の層 $\mathfrak{S}$ の成分として上で定義したリーマン面 $\mathfrak{S}_0(f)$ とを考えよう. 曲線 $\bar{\gamma}:[a,b]\to\mathfrak{S}_0(f)$ が, $\pi\circ\bar{\gamma}=\gamma$ をみたすとき, すなわち, 各 $t\in[a,b]$ に対し $\bar{\gamma}(t)$ の射影が $\gamma(t)$ になっているとき, $\bar{\gamma}$ を f の γ にそう解析接続という. 当然, 曲線の定義によって, $\mathfrak{S}_0(f)$ の位相に関して $\bar{\gamma}(t)$ は連続でなければならない. $\bar{\gamma}$ を γ の $\mathfrak{S}_0(f)$ への持ち上げ (lift) ということもある.

曲線にそう接続は, 芽が連続的に動いていくという直観的な感じに相当している. 接続の存在は保証されていないが, 次の重要な一意性定理が成立する:

定理 1　$\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$ を大域的解析関数 f の同じ曲線 γ にそう解析接続とすると, それらは全く一致するか, さもなければすべての t に対し $\bar{\gamma}_1(t)\neq\bar{\gamma}_2(t)$ である.

証明は容易であろう. π は局所位相写像だから, $\bar{\gamma}_1-\bar{\gamma}_2$ の像は零断面にすっぽり含まれるか, または零断面の点を1点も含むことができない.

この定理により, 接続はその始点での値, すなわち $\bar{\gamma}(a)$ によって一意的に定まる. 始点での芽は $f_{\gamma(a)}$ という形をしているが, f はこの形の芽をいくつか持つかもしれない. いったん始点の芽を指定すると, その接続の存在を仮定すれば, その芽の解析接続といういい方をしてよい.

γ にそう接続を f がもたないこともありうる. 始点でのある芽は接続できるし, ある芽は接続できないということもあってよい. 始点での芽 $f_{\gamma(a)}$ が γ にそって接続できない場合を調べよう. $t_0>a$ を a に十分近くとると, 区間 $[a,t_0]$ に対応する γ の部分弧にそっては, その芽はいつでも接続できる; 実際, $f_{\gamma(a)}$ は関数要素 (f_0,Ω_0) によって定まり, 部分弧が Ω_0 に含まれておれば明らかに接続できている. このようなすべての t_0 の上限を τ とすると, $a<\tau<b$ をみたし, 接続は $t_0<\tau$ に対しては可能で, $t_0\geqq\tau$ に対しては不可能

である．ある意味で，部分弧 $\gamma[a,\tau]$ は f の定義がとだえる点に至る．この部分弧を，与えられた始点における芽から**特異点への道**という；あいまいないい方だが，$\gamma(\tau)$ の上にある特異点に至るともいう．t が τ へ下から近づくとき，芽 $\gamma(t)$ を表す整級数の収束半径は 0 に近づくことに注意してほしい．

曲線にそう接続と直接解析接続の鎖で順に接続していくこととの関係は，もっと深く解明する必要がある．まず，$(f_1,\Omega_1),(f_2,\Omega_2),\cdots,(f_n,\Omega_n)$ を直接解析接続の鎖とすると，$\zeta_1\in\Omega_1$ を $\zeta_n\in\Omega_n$ に曲線 γ で結び，始点の芽 (f_1,ζ_1) から終点の芽 (f_n,ζ_n) への接続 $\bar{\gamma}$ が存在するようにできる．実際，Ω_1 の中で ζ_1 から $\zeta_2\in\Omega_1\cap\Omega_2$ に曲線 γ_1 で結び，Ω_2 の中で ζ_2 から $\zeta_3\in\Omega_2\cap\Omega_3$ に曲線 γ_2 で結び，これを続けて全部つないで γ を作ればよい．γ にそう接続は，γ_k の上で $\bar{\gamma}(t)=(f_k,\gamma(t))$ によって定義される．

逆に，$\bar{\gamma}$ が与えられると曲線 γ が上と同じ状況になるように直接解析接続の鎖を作ることができる．実際，ハイネ・ボレルの補題により，助変数の区間 $[a,b]$ を $[a,t_1],[t_1,t_2],\cdots,[t_{n-1},b]$ と分割し，$[t_{k-1},t_k]$ では適当にとった関数要素 (f_k,Ω_k) により $\bar{\gamma}(t)=(f_k,\gamma(t))$ となるようにできる．(f_k,Ω_k) と (f_{k+1},Ω_{k+1}) は互いに直接解析接続になっているとは限らないが，$\gamma(t_k)$ の近傍への両者の制限を考えると，少なくともそれの直接接続に両者はなっている．

曲線にそう接続の用い方の例として，対数関数を大域的解析関数として定義しよう．このために，Ω において $e^{f(\zeta)}=\zeta$ をみたす関数要素 (f,Ω) の全体が大域的解析関数になることを示したい．

この集合に属する任意の 2 つの関数要素 $(f_1,\Omega_1),(f_2,\Omega_2)$ が直接解析接続の鎖で結びうることだけをたしかめればよい．というのは，関数関係の保存性によって，途中の関数要素が同じ集合に属することは保証される．点 $\zeta_1\in\Omega_1$, $\zeta_2\in\Omega_2$ をとり，原点を通らない曲線 $\gamma(t),t\in[a,b]$ でこの 2 点を結ぶ；これは，ζ_1 も ζ_2 も 0 でないから可能である．関数

$$\varphi(t)=f_1(\zeta_1)+\int_a^t\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt$$

を考えよう．微分してみると，$\gamma(t)e^{-\varphi(t)}$ は定数になることがわかり，$t=a$ の

とき値が1だから，$e^{\varphi(t)}=\gamma(t)$ となる．与えられた t に対し，例えば円 $\Omega=\{\zeta;|\zeta-\gamma(t)|<|\gamma(t)|\}$ においては，$\zeta=\gamma(t)$ に対し値 $\varphi(t)$ をとる $\log\zeta$ の枝 $f(\zeta)$ が一意的に存在する．$\bar{\gamma}(t)$ は明らかに γ にそう接続になる．終点での芽 $\bar{\gamma}(b)$ は (f_2, Ω_2) からきまる芽と一致しないかもしれないが，ζ_2 でのその値は $f_2(\zeta_2)$ と $2\pi i$ の整数倍だけくいちがっている．ζ_2 での正しい値に到達するために，あとは原点のまわりを適当な回数だけまわる閉曲線にそって $\bar{\gamma}(b)$ を接続すればよい．最後に，曲線にそう接続を直接解析接続の有限鎖におきかえることができて，この構成が対数関数を大域的解析関数として定義することがいえた．

問　題

1. 収束円の中で整級数によって定義される関数要素を考え，収束半径は有限とする．このとき，少くとも一つの半径は，それによってきまる大域的解析関数の特異点へ至る道であることを示せ．(整級数はその収束円周上に少くとも一つの特異点をもつ)．
2. 関数要素 (f, Ω) が，Ω の部分領域に f を制限してえられられるものを除いて，直接解析接続を持たないときに，Ω の境界を f の**自然境界**という．級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ は単位円周を自然境界とすることを示せ．(ヒント：偏角が π の有理数倍である半径にそって単位円周に近づくときに，関数が ∞ にいくことを示せ．)
3. 7章3.4節で定義した関数 $\lambda(\tau)$ は実軸を自然境界とすることを示せ．

1.5. ホモトピックな曲線　解析接続の理論にとって基本的であるが，その見地から領域内の閉曲線の位相的性質を調べねばならない．われわれに興味があるのは連続変形の下での曲線の挙動である．直観的には，これは極めて単純な概念である．領域 Ω に含まれ両端点を同じくする2曲線 γ_1, γ_2 に対し，両端点は止めたままで途中を Ω の中だけに限って，γ_1 を γ_2 に連続的に変形できるかどうかを問題にするのは非常に自然である．例えば，図8-1において，γ_1 は γ_2 に変形できるが，γ_3 には変形できない．互いに変形可能な2曲線は Ω でホモトピックであるという．これは明らかに同値関係である．

もちろん，正確な定義を与える必要がある．幸いに，変形の自然な概念はほとんどすぐに数学的用語で説明できる．曲線の変形が，長方形 $[a, b]\times[0, 1]$

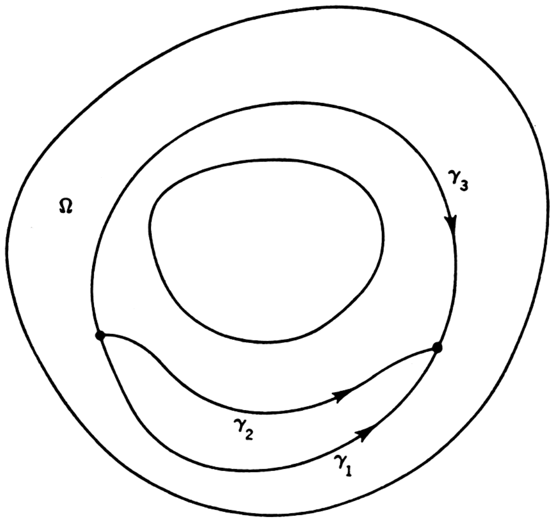


図 8-1　ホモトピックな曲線

で定義された 2 変数 (t, u) の連続関数 $\gamma(t, u)$ によって与えられることは明らかであろう(図8-2). $u=u_0$ と任意に u を止めると曲線 $\gamma(t, u_0)$ が対応し，変形の結果は最初の曲線 $\gamma(t, 0)$ が $\gamma(t, 1)$ へ変るのである．変形が Ω の中で行なわれるというのは，すべての (t, u) に対し $\gamma(t, u)\in\Omega$ となっていることであり，両端点を止めた変形というのは，$\gamma(a, u)$ と $\gamma(b, u)$ が一定になっていることである．$t=t_0$ と t を止めると曲線 $\gamma(t_0, u)$, $u\in[0, 1]$ ができ，これを変形の道という．

これで，ホモトピーの正式な定義に到達した．

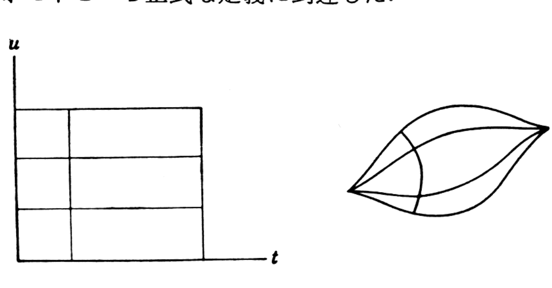


図 8-2

定義2　同じ助変数の区間 $[a, b]$ で定義された2つの曲線 γ_1, γ_2 が，Ω で**ホモトピック**であるというのは，長方形 $[a, b]\times[0, 1]$ で定義され次の性質をもつ連続関数 $\gamma(t, u)$ が存在することである：

1. すべての (t, u) に対し $\gamma(t, u)\in\Omega$,
2. すべての t に対し，$\gamma(t, 0)=\gamma_1(t)$, $\gamma(t, 1)=\gamma_2(t)$,
3. すべての u に対し，$\gamma(a, u)=\gamma_1(a)=\gamma_2(a)$, $\gamma(b, u)=\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$.

γ_1 と γ_2 の助変数の区間を同じにしたのは便宜上のためだけである．もしそうでないなら，助変数の一次変換により区間を一致させて新しい助変数に関しホモトピックのときに，もとの2曲線はホモトピックと考えることに約束する．

読者が容易に確かめられるように簡単な形式的な証明で，上に定義したホモトピーの関係は同値関係であることがわかる．したがって，曲線の全体を同値類にわけることができ，その同値類をホモトピー類という；一つのホモトピー類に入っている曲線はすべて同じ始点と終点をもち，Ω の中で互いに連続的に変形しあえる．同じ曲線の異なる助変数表示はいつもホモトピックになることは注意に値する．実際，$\gamma_2(t)$ が $\gamma_1(t)$ の助変数をとりかえたものということは，非減少関数 $\tau(t)$ で $\gamma_2(t)=\gamma_1(\tau(t))$ をみたすものが存在することである．関数 $\gamma(t, u)=\gamma_1((1-u)t+u\tau(t))$ は，考えている曲線上に値をもち，ゆえに Ω 内にある．$u=0$ と $u=1$ に対し，$\gamma(t, 0)=\gamma_1(t)$, $\gamma(t, 1)=\gamma_1(\tau(t))=\gamma_2(t)$ となり，両端点も固定されている．

γ_1 の終点が γ_2 の始点になっているとき，2曲線 γ_1 と γ_2 をこの順につないで新しい曲線がえられるが，それをホモロジー論のときには $\gamma_1+\gamma_2$ とかくことが多いが，ここでは $\gamma_1\gamma_2$ とかくことにしよう．$\gamma_1\gamma_2$ の助変数表示は一意的ではないが，ホモトピー類をきめるためにはこれは重要でない．さらに，$\gamma_1\gamma_2$ のホモトピー類は γ_1 と γ_2 のホモトピー類によってのみきまることが容易にわかる．この基本的な結果により，$\gamma_1\gamma_2$ のホモトピー類を導く操作をホモトピー類の積とみなしてよい．もちろん，γ_2 の始点が γ_1 の終点と一致するときだけ定義できるのである．一定点 z_0 を始点終点とするような閉曲線の

ホモトピー類だけを考えることにすると，積はいつでも定義でき，それは同じ族に入る曲線によって表される．その上重要なことには，積のこの定義により，領域 Ω に関する z_0 からの閉曲線のホモトピー類の全体は群を作る．この主張を証明するためには次のことを示さねばならない:

1. 結合法則：$(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ は $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$ にホモトピックである，
2. $\gamma 1, 1\gamma$ が γ にホモトピックになるような，単位元の曲線 1 の存在，
3. $\gamma\gamma^{-1}, \gamma^{-1}\gamma$ が 1 にホモトピックになるような，逆元 γ^{-1} の存在．

$(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ は $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$ の高々助変数表示のとりかえにすぎないから，結合法則は明らかである．単位元の曲線として，定数 $z=z_0$ をとることができる；つまり，記号 1 は点 z_0 に縮めうる任意の曲線を表しているとしてよい．最後に，逆元 γ^{-1} は曲線の方向を逆向きにしたものである．γ が $z=\gamma(t), t\in[a, b]$ で表されているとすると，γ^{-1} は $z=\gamma(2b-t), t\in[b, 2b-a]$ で表される．ゆえに，$\gamma\gamma^{-1}$ の方程式は

$$z=\begin{cases}\gamma(t), & a\leqq t\leqq b\\ \gamma(2b-t), & b\leqq t\leqq 2b-a\end{cases}$$

となる．この曲線は，変形

$$\gamma(t, u)=\begin{cases}\gamma(t), & a\leqq t\leqq ua+(1-u)b\\ \gamma(ua+(1-u)b), & ua+(1-u)b\leqq t\leqq u(b-a)+b\\ \gamma(2b-t), & u(b-a)+b\leqq t\leqq 2b-a\end{cases}$$

によって 1 点に縮めうる．説明は明らかであろう：引き返し点を $\gamma(b)$ から $\gamma(a)$ へだんだんと引きもどしているのである．すべての $t\in[a, 2b-a]$ に対し $\gamma(t, 1)=\gamma(a)=z_0$ であるから，これで $\gamma\gamma^{-1}$ が 1 にホモトピックなことが示された．この証明には γ が閉曲線であるという仮定は用いていない．ゆえに，z_0 を始点とする任意の曲線 γ に対し $\gamma\gamma^{-1}$ は 1 にホモトピックである．

こうしてできた群を，領域 Ω の点 z_0 に関する**ホモトピー群**，または**基本群**という．抽象的な群としては，これは点 z_0 のとり方によらない．z_0' を Ω の別の点とすると，z_0 から z_0' へ Ω 内の曲線 c で結ぶ．z_0' からの任意の閉曲線 γ' に，z_0 からの閉曲線 $\gamma=c\gamma' c^{-1}$ を対応させる．この対応はホモトピー

を保ち，したがってホモトピー類の間の対応とみなすことができる．そうみると，$(c\gamma_1'c^{-1})(c\gamma_2'c^{-1})$ は $c^{-1}c$ をうち消して $c(\gamma_1'\gamma_2')c^{-1}$ にホモトピックだから，積も保たれる．最後にこの対応は1対1である．何故なら，γ が与えられたときに，$\gamma'=c^{-1}\gamma c$ をとると対応する曲線 $c\gamma'c^{-1}=(cc^{-1})\gamma(cc^{-1})$ は γ にホモトピックだからである．これで，z_0 に関するホモトピー群と z_0' に関するそれとが同型になることが証明できた．

γ_1, γ_2 を始点が z_0 で共通の終点をもつ2曲線とするとき，γ_1 が γ_2 にホモトピックになるための必要十分条件は $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ が1にホモトピックになることである．何故なら，γ_1 が γ_2 にホモトピックなら $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ は $\gamma_2\gamma_2^{-1}$ にホモトピックになり，ゆえに1にホモトピックである．逆に，$\gamma_1\gamma_2^{-1}$ が1にホモトピックとすると，

$$(\gamma_1\gamma_2^{-1})\gamma_2=\gamma_1(\gamma_2^{-1}\gamma_2)$$

は同時に γ_1 にも γ_2 にもホモトピックになり，γ_1 が γ_2 にホモトピックなことがいえる．この理由により，閉曲線のホモトピーを研究すれば十分である．

ホモトピー群をきっちり決めることは，ホモトピー群が位相的不変量であるという事実により単純化される．実際，Ω から Ω' の上への位相写像によって，Ω での変形は Ω' に移され，ホモトピー類の間の積を保つ1対1対応をきめることがわかる．ゆえに，位相的に同型な領域は，同型なホモトピー群をもつ．

円板のホモトピー群は単位元だけからなる；これは，共通の両端点をもつ二つの曲線は常にホモトピックになることを意味している．証明には円が凸領域であることを用いる：曲線 $z=\gamma_1(t)$ は曲線 $z=\gamma_2(t)$ に変形

$$\gamma(t,u)=(1-u)\gamma_1(t)+u\gamma_2(t)$$

によって移り，このとき，変形の道は線分である．任意の凸領域に対して同じ証明が効く．とくに，全平面のホモトピー群も単位元だけである．

第6章第1節で，全平面でない単連結領域は円板に等角写像できることを示した．ここでは等角性は重要ではなく，その写像が位相写像であるということから，単連結領域の基本群は単位元だけということが結論できる．この

逆も成り立つことがあとでわかるだろう．

1.6. 一価性定理　Ω を複素平面の領域とする．大域的解析関数 f が，Ω 内の任意の曲線 γ と γ の始点 ζ_0 における f の任意の芽に対し，その芽が γ にそっていつでも接続可能という条件をみたす場合を考えよう．すなわち，f の任意の関数要素 (f_0, Ω_0), $\zeta_0 \in \Omega_0$ に対し，(f_0, ζ_0) によって定義される芽を始点とする γ 上の接続 $\tilde{\gamma}$ が存在するとしよう．

両端点を共有する 2 曲線 γ_1, γ_2 に対し，同じ始点での芽を γ_1 と γ_2 にそって接続したときに，終点で同じ芽がえられるかどうかに興味がある．次の定理は一価性定理(モノドロミー定理)とよばれている:

定理 2　曲線 γ_1, γ_2 は Ω でホモトピックとし，始点で与えられた f の芽は Ω 内のすべての曲線にそって接続可能とすると，この芽の γ_1, γ_2 にそう接続は終点で同じ芽になる．

まず第一に，$\gamma\gamma^{-1}$ という形の曲線にそう接続は，いつでも初めの芽にもどることに注意する．同様に，$\sigma_1(\gamma\gamma^{-1})\sigma_2$ という形の曲線にそう接続は，$\sigma_1\sigma_2$ にそう接続と同じである．この理由によって，γ_1, γ_2 にそう接続が終点で同じ芽になるということは，$\gamma_1\gamma_2^{-1}$ にそう接続が初めの芽にもどるということと同値である．

仮定により，γ_1 から γ_2 への変形 $\gamma(t, u)$ が存在する．$\gamma(t, u)$ の定義域 $R=[a, b]\times[0, 1]$ 内の任意の曲線 σ は $\gamma(t, u)$ により Ω 内の曲線 σ' に写り，σ' の始点が γ_1, γ_2 の始点と同じときに始点に与えられている芽は σ' にそって一意的に接続可能である；簡単のために，それを σ にそう接続ということにしよう．定理の主張は，長方形 R の周 Γ にそう接続によって，初めの芽にもどるということである．Γ の向きはどちらでもよいが，どちらかにきめておく．

証明は等分していく方法が簡単である．R を水平に 2 等分し，下半分 R_1 の周を，下左隅の角 0 から出発し Γ と共通な辺では Γ と同じ向きになるように向きをきめ，π_1 とかく．上半分 R_2 に対し，0 から垂直に R_2 の下左隅

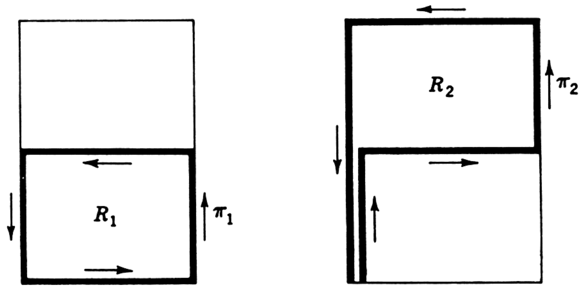


図 8-3　一 価 性 定 理

の角にいたり，R_2 の周を Γ との共通辺では Γ と同じ向きになるように一周し，垂直に 0 にもどる曲線を π_2 とする(図8-3)．曲線 $\pi_1\pi_2$ は，Γ とは $\sigma\sigma^{-1}$ の形をした中間の曲線の分だけしかことならない．したがって，$\pi_1\pi_2$ にそう接続は Γ にそう接続と同じである．ゆえに，π_1, π_2 にそう接続で初めの芽にもどれば Γ についてもそうなる．背理法を用いることにして，Γ にそう接続で初めの芽にもどらないと仮定しよう．すると，π_1 か π_2 の少くとも一方に対してもそうなる．その長方形を垂直に 2 等分して同じ論法を適用する．これをくり返すと，長方形の列 $R \supset R^{(1)} \supset R^{(2)} \supset \cdots \supset R^{(n)} \supset \cdots$ と，$\pi^{(n)}$ にそう接続が初めの芽にもどらないような対応する閉曲線 $\pi^{(n)}$ がえられる．各 $\pi^{(n)}$ は $\sigma_n \Gamma_n \sigma_n^{-1}$ という形をしており，σ_n は 0 から $R^{(n)}$ の左下隅にいたる定まった折れ線で Γ_n は $R^{(n)}$ の周である；さらに，σ_n は σ_{n+1} の部分曲線になっている．

$n \to \infty$ とすると長方形 $R^{(n)}$ は 1 点 P_∞ に収束し，折れ線 σ_n は極限において P_∞ を終点とする曲線 σ_∞ を作る．始点での芽の σ_∞ にそう接続は存在し，写像 $\gamma(t, u)$ による P_∞ の像 ζ_∞ における関数要素 $(f_\infty, \Omega_\infty)$ にいたる．十分大きな n に対し，Γ_n の像は Ω_∞ に含まれ，σ_n の終点でえられる芽は関数要素 $(f_\infty, \Omega_\infty)$ に属する．このとき，$\pi^{(n)}$ にそう接続は $(f_\infty, \Omega_\infty)$ によって構成され，ゆえに接続は初めの芽にもどる．これは $\pi^{(n)}$ のとり方に反し，これで Γ にそう接続で初めの芽にもどることが示された．

何よりも一価性定理から，単連結領域において任意の曲線にそう接続が常に可能な大域的解析関数は，どの枝をとってもその領域で一価な解析関数を

きめることがわかる．これはまた，単連結領域の上の(分岐点のない)リーマン面は常に唯一つのシートからなる，といいかえうる．

さらにこれから，前に述べたホモトピー群が単位元だけからなる領域は単連結であることが示される．何故なら，Ω が多重連結であったとしよう．そのとき，Ω の補集合の有界な連結成分 E_0 があり，$z_0 \in E_0$ ならば $\log(z-z_0)$ は Ω で一価にならないことを知っている．このとき，一価性定理から，Ω のホモトピー群は単位元だけではありえない．

これで，単連結性を特徴づける次の3つの条件の同値性を示す最後の段階が終り，複素平面内の領域に対し3条件の同値が示された：(1) 領域 Ω は補集合が連結のとき単連結である；(2) 円板に位相同型なとき Ω は単連結である；(3) 基本群が単位元だけからなるとき，Ω は単連結である．

1.7. 分岐点

多価関数の特異点をよく詳細に調べるためには，1点を抜いた円の基本群を求める必要がある．点を抜いた円を $0<|z|<\rho$ とし，定点として例えば正の半径上の点 $z_0=r<\rho$ をとることにしよう．中心からの射影

$$\gamma(t, u)=(1-u)\gamma(t)+ur\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$$

により，z_0 からでる閉曲線は円周 $|z|=r$ 上の曲線に変形される．したがって，この円周上の曲線を考えればよい．

それをまた，$\gamma(t)$ とかくことにしよう．

連続性から，各 t_0 はそこで $|\gamma(t)-\gamma(t_0)|<r$ をみたすような近傍をもつ；このような近傍では，$\gamma(t)$ が値 r と値 $-r$ を両方ともとるということはない．ハイネ・ボレルの補題によるかまたは等分をしていくことにより，$\gamma=\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n$ とし各 γ_k は r

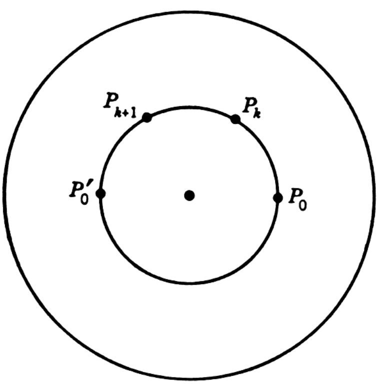


図 8-4

と $-r$ を両方とも通ることはないようにできる．簡単のために $r, -r$ をそれぞれ P_0, P_0' とかき，γ_k の端点を P_k, P_{k+1} とかく(図8-4)．γ_kは正または負の半径を除いてえられた単連結領域に含まれるから，2つの弧 P_kP_{k+1} のどちらかに変形できる．結局，γ は円弧の積に変形でき，その端点は順に $P_0P_1P_2\cdots P_nP_0$ である．この道は，$P_0P_1P_2P_0P_2P_3P_0\cdots P_0P_{n-1}P_nP_0$ と順におきかえてもよい．ここで，P_kP_0, P_0P_k は P_0' を含まない方の弧をとることにしておく．実際，新しい道は，往復する道 $P_kP_0P_k$ を挿入したものであるがそれは1にホモトピックである．

γ は $P_0P_kP_{k+1}P_0$ という形の閉曲線の積にホモトピックであることがわかった．弧 P_kP_{k+1} が P_0' を含まないなら，この曲線 $P_0P_kP_{k+1}P_0$ は1にホモトピックである．一方，P_kP_{k+1} が P_0' を含むときには，全円周を C として，可能な場合を数えあげることにより，この曲線は C か C^{-1} にホモトピックなことがわかる．ゆえに，閉曲線 γ は C の何乗かにホモトピックである．

最後に，C^m が1にホモトピックになるのは $m=0$ のときだけであることを示す．これは，

$$\int_{C^m}\frac{dz}{z}=m\cdot 2\pi i$$

からわかる．もし，C^m が1にホモトピックなら，この積分は0にならなければならない．以上のことから，1点を抜いた円の基本群は，整数の加法群に同型なことがいえた．明らかに，円環領域も同じ基本群をもつ．

さて，大域的解析関数 f が，点を抜いた円 $0<|z|<\rho$ 内のすべての曲線にそって接続が可能である場合を考える．$z_0=r$ における芽を C^m にそって接続してみよう．すべての m に対して接続でえられた終点での芽がもとにもどらない場合と，C^h にそう接続で初めの芽にもどるような最小の正整数 h が存在する場合とにわかれる．後者の場合，$m=nh+q$, n は整数で $0\leqq q<h$ としよう．C^m にそう接続で初めの芽にもどるなら C^q に対してもそうなる．h のとり方から，$q=0$ でなければならない．ゆえに，C^m にそう接続で初めの芽にもどるのは，m が h の倍数のときだけである．

$0<|\zeta|<\rho^{1/h}$ を $0<|z|<\rho$ に写す写像 $z=\zeta^h$ を考えよう．f は次の意味で

一価解析関数 $F(\zeta)$ として表せることを示したい：各 $\zeta_1, 0<|\zeta_1|<\rho^{1/h}$ に対し，関数要素 $(f, \Omega)\in \boldsymbol{f}, \zeta_1{}^h\in\Omega$ で，ζ_1 の近傍において $F(\zeta)=f(\zeta^h)$ が成立するようなものが存在する；とくに，$\zeta_0=r^{1/h}$ には $\boldsymbol{f}$ の z_0 における与えられた初めの芽が対応しているものとする．

$F(\zeta)$ をつくるために，ζ_0 を ζ に曲線 γ' で結び，写像 $z=\zeta^h$ による γ' の像にそって $\boldsymbol{f}$ の与えられた初めの芽を接続し，この接続による終点での芽の値を $F(\zeta)$ とする．$F(\zeta)$ が一意的に定まることを示さねばならない．γ_1', γ_2' を ζ_0 から ζ への2つの道とすると，$\gamma_1'\gamma_2'^{-1}$ は ζ_0 を通る円周の累乗 C'^n に変形できる．ゆえに，像の曲線 $\gamma_1\gamma_2{}^{-1}$ も C'^n の像に変形され，それは C^{nh} である．C^{nh} にそう接続は初めの芽にもどり，ゆえに γ_1 と γ_2 は同じ値をきめる．最後に，ζ が ζ_1 の近傍にあるとき，まず ζ_0 から ζ_1 へ曲線 γ_1' で結び，その近傍の中で ζ_1 から ζ まで曲線 γ' で結ぶ．近傍を十分小さくしておけば，その近傍の中で ζ, γ' を動かしたときに γ' の像にそう接続は一つの関数要素 (f, Ω) によってきまり，その近傍内で $F(\zeta)=f(\zeta^h)$ である．

$F(\zeta)$ は原点の近傍で原点を除いて一価解析的だから，次の形にローラン展開できる：

$$F(\zeta)=\sum_{-\infty}^{\infty} A_n\zeta^n \tag{1}$$

この展開は，最初の芽のとり方によって変ることに注意しなければならない；異った芽をとると異った展開を生ずるだろうし，h の値も異るかもしれぬ．実際に，級数 (1) ですら $z^{1/h}$ の h 個の値のどれを最初の値にとるかによって h 個の異なる展開が生じる．$\omega=e^{2\pi i/h}$ とおくと，これらの展開は

$$f_\nu(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}A_n\omega^{\nu n}z^{n/h} \quad (\nu=0, 1, \cdots h-1) \tag{2}$$

と表される．芽 (f_ν, z_0) を C にそって接続すると $(f_{\nu+1}, z_0)$ になる．（ただし，f_h は f_0 のこと）．

とくに，ローラン展開が負べきの項を有限項しか含まないときを考えよう．このときは，$F(\zeta)$ は除去可能特異点か極になり，多価関数 $f(z)$（もっと正確にいうと，中心を抜いた円の中で与えられた初めの枝を接続してえられた大

域的解析関数)は，もちろん $h>1$ として，$z=0$ で**代数的特異点**または**分岐点**をもつという．$F(\zeta)$ が除去可能特異点をもつときは，分岐点は**代数的通常特異点**といい，そうでないときは**代数的極**という．いずれの場合も，z が任意の曲線にそって0に近づくとき，$f(z)$ は一定の極限値 A_0 かまたは∞に近づく．

今と同様に，任意の点 a や∞で，孤立特異点を考えることができ，点を抜いた円の半径はいくらでも小さくとれる．有限の h の場合には，$w=f(z)$ と独立変数 z との間の対応は

$$w=\sum_{-\infty}^{\infty}A_n\zeta^n$$

$$z=a+\zeta^h \quad \text{または} \quad z=\zeta^{-h}$$

という形の式で表される*．変数 ζ を**局所一意化変数**という．

代数特異点の場合には，f のリーマン面に点を追加して a を射影とする分岐点を含むようにする方がよい．分岐点自身は f の芽ではないが，(2) に似た分数べきの級数展開

$$(3) \qquad f_\nu(z)=\sum_{n=n_0}^{\infty}A_n\omega^{\nu n}(z-a)^{n/h}$$

の集りによってきまる；特異点が無限遠点の上にあるときには，$z-a$ を $1/z$ でおきかえる．分岐点の近傍は，分岐点自身と $\delta>0$ に対し $|\zeta-a|<\delta$ をみたす芽 (f_ν,ζ) の全体からなる集合で，f_ν は ζ の近傍で定義される $(z-a)^{1/h}$ の1価な枝を (3) に代入してえられた芽である．こうしてえられた位相空間は，分岐点も含めて各点が円板に同相な近傍をもつという意味で，曲面になる．

ワイエルシュトラスの理論では，分数べきの級数も含めて一つの整級数から解析接続によってえられる整級数の全体を考えるのが普通で，それは解析的形成体 (analytisches Gebilde) とよばれている．

---

*) (訳注)．$h-1$ を分岐点 a (または ∞) での分岐位数または分岐度という (105 頁参照)．

2. 代数関数

P を2変数の多項式とすると，方程式 $P(w, z)=0$ は各 z に対し有限個の解 $w_1(z), \cdots, w_m(z)$ をもつ．これらの値はある大域的解析関数 $f(z)$ の値とみなしうることを示したい．このときこの関数を代数関数という．逆に，大域的解析関数が与えられたときに，それが代数方程式をみたすかどうかの判定ができるようにしたい．

2.1. 二つの多項式の終結式

2変数多項式 $P(w, z)$ は，定数でない二つの多項式の積として表せないときに，**既約**であるという．多項式 P, Q が定数以外の共通因数をもたないときに，**互いに素**であるという．

次の定理は代数的なものである．しかし，代数関数論において根本的に重要なので証明をつけておく．

定理 3　$P(w, z), Q(w, z)$ を互いに素な多項式とすると，w に関する方程式 $P(w, z_0)=0$ と $Q(w, z_0)=0$ が共通根をもつような z_0 は高々有限個である．

P と Q を w について降べきの順に整とんし，$Q(w, z)=b_0(z)w^m+\cdots+b_m(z)$ とおく．ただし，$b_0(z)$ は定数0ではないとする．w の多項式として P を Q で割ると，商と余りに z の有理式を係数とする w の多項式をうる．ユークリッドの互除法を適用すると，q_k, R_k を w, z の多項式とし c_k を分母を払うために用いる z の多項式として，

$$
\begin{aligned}
&c_0P=q_0Q+R_1\\
&c_1Q=q_1R_1+R_2\\
(4)\qquad &c_2R_1=q_2R_2+R_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&c_{n-1}R_{n-2}=q_{n-1}R_{n-1}+R_n
\end{aligned}
$$

となる．ここで，R_k の w に関する次数は減少しており，R_n は z だけの多項式である．$R_n(z)$ は定数0ではない．何故なら $R_n(z)$ が恒等的に0である

としよう．R_{n-1} の w に関する次数は正だから，w を含む R_{n-1} の既約因数が存在する．素因数分解の一意性定理から，R_{n-2} は R_{n-1} の w を含む既約因数で割り切れなければならない．同じ理由から順々にすべての R_k が，そして Q も P もこの因数で割り切れることがわかる．これは，P, Q が互いに素という仮定に反する．

さて，$P(w_0, z_0)=0$, $Q(w_0, z_0)=0$ と仮定しよう．(4) に代入することにより，$R_1(w_0, z_0)=0$, …, $R_{n-1}(w_0, z_0)=0$ がえられ，結局 $R_n(z_0)=0$ をうる．R_n は定数 0 ではないから，この条件をみたす z_0 は有限個で定理の証明ができた．

多項式 $R_n(z)$ を P と Q の**終結式**という．もっと正確には，終結式を一意的に決めるためには，(4) における c_k を可能な最低の次数にとらねばならない．われわれは終結式には定理3の結論ほど興味がない．既約多項式 $P(w, z)$ とその w に関する偏導関数 $P_w(w, z)$ に，定理を適用しよう．P が w に関し次数が正ならばこの二つの多項式は互いに素になり，P と P_w の終結式は P の**判別式**とよばれる．判別式の零点 z_0 は，$P(w, z_0)=0$ が重根をもつような z_0 である．

最後に，任意の互いに素な多項式 P, Q に対しその終結式 $R(z)$ は，適当な多項式 p, q により $R=pP+qQ$ の形で表せることを注意しておく．これは，(4) から容易に導かれる．

2.2. 代数関数の定義と性質　まず定義をきちんと与えることから始めよう．

定義3　大域的解析関数 f が**代数関数**であるというのは，定数 0 とは異なる多項式 $P(w, z)$ があって，そのすべての関数要素 (f, Ω) が Ω で $P(f(z), z)=0$ をみたすことである．

関数関係の保存性により，一つの関数要素が方程式 $P(f(z), z)=0$ をみたすことをいえば十分である．このとき，ほかの要素も自動的に同じ式をみたす．さらに，$P(w, z)$ は既約多項式と仮定してよい．何故なら，$P=P_1P_2\cdots P_n$

と既約式の積に分解されたとしよう．各 $z \in \Omega$ に対し $P_k(f(z), z)=0$ をみたす k が一つはある．Ω の点に収束する相異なる点からなる点列 $z_n \in \Omega$ をとると，少くとも一つの k に対し $P_k(f(z_n), z_n)=0$ をみたす z_n が無限個存在する．これから Ω で恒等的に $P_k(f(z), z)=0$ が成立し，ゆえに $\boldsymbol{f}$ のすべての関数要素がこの式をみたす．P の代りに P_k をとればよい．

代数関数に対して決まる既約多項式 P が定数倍を無視すれば一意的であることは容易にわかる．Q を P と本質的に異なる既約多項式とすると，終結式 $R(z)=pP+qQ$ がきまる．任意の $z \in \Omega$ に対し $P(f(z), z)=0$, $Q(f(z), z)=0$ とすれば，Ω で恒等的に $R(z)=0$ となりこれは R が定数 0 でないことに反する．P が z だけの多項式ということはありえないことを注意しておく．一方，P が w だけの多項式とすると，既約ということから $w-a$ という形になり，関数 $\boldsymbol{f}$ は定数 a になってしまう．

次に，w に関する次数が正の任意の既約多項式 $P(w, z)$ に対して，対応する代数関数が存在することを証明しよう．

$$P(w, z)=a_0(z)w^n+a_1(z)w^{n-1}+\cdots+a_n(z)$$

と仮定する．多項式 $a_0(z)$ の零点でもなく P の判別式の零点でもないように点 z_0 をとると，方程式 $P(w, z_0)=0$ はちょうど n 個の相異なる根 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ をもつ．この仮定の下で次のことがいえる：

補題 1　次の性質をもつ z_0 を含む開円板 Δ と n 個の関数要素 (f_1, Δ), (f_2, Δ), $\cdots$, (f_n, Δ) が存在する：

(a)　Δ で $P(f_i(z), z)=0$,

(b)　$f_i(z_0)=w_i$,

(c)　$P(w, z)=0$, $z \in \Delta$ ならば，ある i に対し $w=f_i(z)$.

補題の証明をしよう．多項式 $P(w, z_0)$ は $w=w_i$ に 1 位の零点をもつ．$\varepsilon>0$ を円板 $|w-w_i|\leqq\varepsilon$ が重なり合わないようにとり，円周 $|w-w_i|=\varepsilon$ を C_i とかく．すると，C_i 上では $P(w, z_0)\neq 0$ で，偏角の原理より

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_i}\frac{P_w(w, z_0)}{P(w, z_0)}dw=1$$

をうる．z_0 を z でおきかえると，この積分は z_0 の近傍では定義され z の連続関数となる．とる値が整数に限られるから，z_0 の近傍 $\varDelta$ が存在し，任意の $z\in\varDelta$ に対し

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_i}\frac{P_w(w,z)}{P(w,z)}dw=1$$

が成り立つ．これは，方程式 $P(w,z)=0$ が円 $|w-w_i|<\varepsilon$ の中にちょうど一つの根をもつことを意味するから，この根を $f_i(z)$ とかくことにする．留数計算をすることにより，その値は

$$f_i(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_i}w\frac{P_w(w,z)}{P(w,z)}dw$$

と表せる．この表示から $f_i(z)$ が正則関数であることがわかる．さらに $f_i(z_0)=w_i$ であり，(c) は方程式 $P(w,z)=0$ の n 個の根が $f_i(z)$ でえられそれ以上は根をもたないことからいえる．

この補題から直ちに，多項式 P に対応して一つの代数関数 $\boldsymbol{f}$ が存在することはいえる；すなわち，有限個の除外点でない任意の z_0 に対し，補題でえられる関数要素 $(f_1,\varDelta)$ によって定まる大域的解析関数 $\boldsymbol{f}$ をとればよい．次節でこのような関数要素 $(f_i,\varDelta)$ がすべて一つの同じ大域的解析関数に属すことを示す；これがいえると P に対応する代数関数 $\boldsymbol{f}$ の一意性がいえる．実際，(f,Ω) を $P=0$ をみたす関数要素とする．除外点ではない $z_0\in\Omega$ が存在しそれに対し $\varDelta$ がとれる．$z\in\Omega$ に対し $P(f(z),z)=0$ だから，(c) により $\varDelta\cap\Omega$ の各点で $f(z)$ はある $f_i(z)$ に等しい．$i=1,2,\cdots,n$ で有限個だから，ある一つの i に対し z_0 の近傍で $f(z)=f_i(z)$ となる z が無限個あり，(f,Ω) は $(f_i,\varDelta)$ と同じ大域的解析関数に属することがわかる．

除外点を $c_1,c_2,\cdots,c_m$ とかく．$P(f(z),z)=0$ をみたす関数要素は，除外点 c_k を通らない任意の曲線にそって解析接続可能であることを示す．これを否定すると，曲線 $\gamma[a,b]$ で，任意の部分曲線 $\gamma[a,\tau]$, $\tau<b$ にそっては最初の芽が接続できるが，全曲線にそっては接続できないようなものが存在する．$z_0=\gamma(b)$ とおき，補題1によって $\varDelta$ をとり，τ を $t\in[\tau,b]$ なら $\gamma(t)\in\varDelta$ となるようにとる．上と同じ理由で，$\gamma[a,\tau]$ にそう接続でえられた芽 $\tilde{\gamma}(\tau)$ は，

補題の関数要素の一つ (f_i, Δ) によってきまる．すると，b までずっと接続できることになり，これは仮定に反する．

まだ，すべての (f_i, Δ) が同じ大域的解析関数に属することは証明していない．証明のこの部分のためには，除外された危点 c_k での挙動をもっとくわしく調べなければならない．

2.3. 危点における挙動　これまで考察から除外してきた危点 c_k は，P の最高次の係数 $a_0(z)$ の零点と判別式の零点であった．δ を小さくとり，円 $|z-c_k|<\delta$ が他の危点を含まないとしよう．この円の中に点 $z_0 \neq c_k$ を固定し一つの芽 (f_i, z_0) をきめておく．この芽は中心を抜いた円 $0<|z-c_k|<\delta$ の中のすべての曲線にそって接続することができる．さらに，z_0 を通り c_k を中心とする円周 C にそって接続すると，芽 (f_j, z_0) になる．ここにあらわれる可能性のある芽は有限個だから，C^h にそう接続が初めの芽 (f_i, z_0) にもどるような最小の正整数 $h \leqq n$ が存在する．1.7 節の結果から

$$f_i(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu (z-c_k)^{\nu/h} \tag{5}$$

とかくことができる．

まず，c_k は $a_0(z)$ の零点ではないとしよう．そのとき，z が c_k に近づくときに $f_i(z)$ は有界の範囲にとどまっている．実際，$f_i(z) \neq 0$ とすると，方程式 $P(f_i(z), z)=0$ は

$$a_0(z) + a_1(z) f_i(z)^{-1} + \cdots + a_n(z) f_i(z)^{-n} = 0 \tag{6}$$

とかきかえられる．$f_i(z)$ が非有界ならば，$z_n \to c_k$, $f_i(z_n) \to \infty$ をみたす点列 z_n が存在する．(6) に代入すると，$a_0(z_n) \to 0$ となりこれは $a_0(c_k) \neq 0$ に反してしまう．これから，展開式 (5) は正のべきの項だけを含み，f_i は c_k で高々代数的通常特異点をもつことがわかる．

次に，$a_0(c_k)=0$ の場合を考えよう．c_k を $a_0(z)$ の m 位の零点とすると，$\lim_{z \to c_k} a_0(z)(z-c_k)^{-m} \neq 0$ である．(6) から

$$a_0(z)(z-c_k)^{-m} + a_1(z)(z-c_k)^{-m} f_i(z)^{-1} + \cdots + a_n(z)(z-c_k)^{-m} f_i(z)^{-n} = 0$$

をうる．$f_i(z)(z-c_k)^m$ が非有界ならば，同様にして矛盾をうる．1.7 節のように

$$F(\zeta)=\sum_{-\infty}^{\infty}A_\nu\zeta^\nu$$

とかき，$F(\zeta)\zeta^{mh}$ が有界であることがわかる．ゆえに，$F(\zeta)$ は高々 mh 位の極をもち，f_i は c_k で高々代数的極をもつ．特に代数的通常特異点になることもある．

最後に，$z=\infty$ での挙動も議論しなければならない．∞ の近傍で

$$f_i(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}A_\nu z^{\nu/h}$$

という形の展開をもつことは明らかである．多項式 $a_i(z)$ の次数を r_i としよう．(恒等的に 0 となっているものは考察から省く)．整数 m を

$$m>\frac{1}{k}(r_k-r_0)\,,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{7}$$

をみたすようにとる．$z\to\infty$ のときに $f_i(z)z^{-m}$ は有界であることを示したい．否定すると，∞ に行くある点列に対して $f_i(z)^{-1}z^m\to 0$ となる．このとき，$f_i(z)^{-k}z^{mk}\to 0$ となり，(7)からすべての $k\geqq 1$ に対し $f_i(z)^{-k}z^{r_k-r_0}\to 0$ となる．(6)に z^{-r_0} をかけてみると，第一項を除いて他の項はすべて 0 に収束する．これは矛盾であり，$f_i(z)$ は無限遠点で高々代数的極をもつことがわかった．

以上をまとめてみると，代数関数は拡張された平面上で高々代数特異点しかもたないことが証明できた．この命題の逆を考えたい．逆命題をうるために，1点の上にある枝が有限個であることを導く仮定をつけ加えることが重要である．

f を大域的解析関数とする．各 c に対し中心 c の開円板から中心を抜いた領域 $\varDelta$ があり，1点 $z_0\in\varDelta$ で定義された f の芽はすべて $\varDelta$ 内の任意の曲線にそって接続可能で c を高々代数特異点とすると仮定する．$c=\infty$ のときも $\varDelta$ をある円の外側として同じ仮定をみたすとする．さらに，ある一つの $\varDelta$ に対し，$z_0\in\varDelta$ にある f の異なる芽は有限個と仮定する．

拡張された平面は中心もこめた $\varDelta$ の有限個でおおわれるから，本当に特異

点になっている点は有限個であることがわかる．それを c_k とかく．任意の $z\neq c_k$ にある芽の個数は一定であることは容易に示される．何故ならば，このような点は小さな近傍をとると，その近傍で $\boldsymbol{f}$ の芽はすべて一価で近傍全体に接続可能とできる．ゆえに，ちょうど n 個の芽をもつような点 z の集合は開集合である（n は有限でも無限でもよい）．拡張された平面から有限個の点 c_k を除いたものは連結だから，この集合の一つだけが空集合でない．ゆえに，n は一定であり仮定から無限ではない．また，n は 0 でもない．もし 0 なら $\boldsymbol{f}$ が関数要素を一つも含めないことになってしまう．

任意の点 $z\neq c_k$ での枝を $f_1(z),\cdots,f_n(z)$ と書いて良い．しかし，その順はきまっていない．$f_i(z)$ の基本対称式，すなわち，多項式

$$(w-f_1(z))(w-f_2(z))\cdots(w-f_n(z))$$

の係数を考える．この係数は z の関数と考えることができ，孤立特異点 c_k を除いて明らかに解析的である．z が c_k に近づくときに，各 $f_i(z)$ は $|z-c_k|$ の高々負べきの位数で無限大に行くことがわかっている．ゆえに，基本対称式に関しても同じことがいえる．孤立特異点は無限遠点も含めて高々極であることがいえて，ゆえに基本対称式は z の有理関数になる．共通分母を $a_0(z)$ とかくと，すべての枝 $f_i(z)$ は代数方程式

$$a_0(z)w^n+a_1(z)w^{n-1}+\cdots+a_n(z)=0$$

をみたすことがわかり，$\boldsymbol{f}$ が代数的であることが証明できた．

今は，2.2 節の終りに残した問題を解決するのは容易である．P は既約で w について n 次式とし，関数要素 (f,Ω) が方程式 $P(f(z),z)=0$ をみたすとしよう．それからきまる大域的解析関数 $\boldsymbol{f}$ は代数特異点のみをもち，枝も有限個である．したがって今示したことから，$\boldsymbol{f}$ は枝の個数に等しい次数の代数方程式をみたす．ゆえに，次数がそれ以下の既約な方程式をみたすことになる．しかし，それがみたす唯一の既約方程式は $P(w,z)=0$ で次数は n である．ゆえに，枝の個数はちょうど n であり，$P(w,z)=0$ のすべての解は同じ大域的解析関数の枝であることがわかった．

結果をまとめておこう：

定理 4　大域的解析関数は，枝が有限個で代数特異点だけをもつならば代数関数である．代数関数 $w=f(z)$ は既約な代数方程式 $P(w,z)=0$ をみたし，この P は定数倍を除いて一意的に定まる．そして，このような方程式は対応する代数関数を一意的に定める．

既約な代数方程式 $P(w,z)=0$ は代数曲線を定義するということがある．代数曲線の理論は代数学と関数論の高度に発展した分野である．われわれは，関数論的側面からのほんの初等的な部分を展開できただけである．

問　題

1.　$w^3-3wz+2z^3=0$ で定義される代数関数の特異点と種類を調べよ．

3．ピカールの定理

この節では整関数の除外値に関する有名なピカールの定理を証明する．一価性定理 (1.6節)の応用としてモジュラー関数 $\lambda(\tau)$ (第7章3.4節3.5節)を本質的に用いてその証明を行なう．これは，ピカール自身の証明である．準備が少くてすむといういみでもっと初等的な別証がいくつかあるが，もとの証明ほど洞察力に富むものはほかにない．

3.1．除外値　複素数 a が関数 $f(z)$ の除外値というのは，f の定義域において $f(z)\neq a$ が成立することである．例えば，0 は全平面で e^z の除外値である．

定理 5 (ピカール)　2つ以上有限な除外値をもつ整関数は定数にかぎる．

整関数とは全平面で解析的な関数のことである．a と b を相異なる有限の値とし，すべての z に対し $f(z)\neq a,\ f(z)\neq b$ とすれば，$f(z)$ が定数になることを示す．$f_1(z)=(f(z)-a)/(b-a)$ を考えよう．これは整関数で $\neq 0,\ \neq 1$ である．f_1 が定数なら f もそうなる．ゆえに，はじめから $a=0,\ b=1$ と仮定

して一般性を失なわない.

大域的解析関数 $\boldsymbol{h}$ をその関数要素 (h, Ω) が次の性質をもつように定義する：$z\in\Omega$ に対し $\mathrm{Im}\, h(z)>0$ で $\lambda(h(z))=f(z)$ をみたす. ここで, $\lambda(\tau)$ は第7章3.4節で定義したモジュラー関数である. $\boldsymbol{h}$ が平面内のすべての道にそって接続可能なことを示そう. そうすると平面は単連結だから, 一価性定理により $\boldsymbol{h}$ は整関数 $h(z)$ を定義する. $h(z)$ のとる値はすべて上半平面内にあるから, e^{ih} は有界になる. リュービルの定理から h は定数になり, ゆえに $f(z)=\lambda(h(z))$ もそうなってしまう.

第7章定理7より, $\lambda(\tau_0)=f(0)$ をみたす上半平面の点 τ_0 が存在する. 同じ定理により $\lambda'(\tau_0)\neq 0$ であり, 局所的に λ の逆関数が存在する. それを λ_0^{-1} とかき, $f(0)$の近傍 Δ_0 で定義できているとする. λ_0^{-1} は Δ_0 で $\lambda(\lambda_0^{-1}(w))=w$ をみたし, $\lambda_0^{-1}(f(0))=\tau_0$ をみたすという条件で特徴づけられる. 連続性から原点の近傍 Ω_0 を $z\in\Omega_0$ なら $f(z)\in\Delta_0$ になるようにとることができ, ゆえに Ω_0 で $h(z)=\lambda_0^{-1}(f(z))$ が定義できる. (h, Ω_0) を可能な限り解析接続してえられた大域的解析関数を $\boldsymbol{h}$ としよう.

(h, Ω_0) があらゆる道にそって解析接続が可能であり, $\mathrm{Im}\, h$ がつねに正のままであることを示さねばならぬ. これを否定すると, 道 $\gamma[0, t_1]$ をみつけ, 任意の $t<t_1$ までは h が接続でき $\mathrm{Im}\, h$ は正であるが, h は t_1 までは接続できないかまたは $t\to t_1$ のときに $\mathrm{Im}\, h[\gamma(t)]\to 0$ となる. $\lambda(\tau_1)=f(\gamma(t_1))$ をみたす上半平面の点 τ_1 がきまり, $f[\gamma(t_1)]$ の近傍 Δ_1 で定義され $\lambda_1^{-1}(f[\gamma(t_1)])=\tau_1$ をみたす λ の局所的な逆関数 λ_1^{-1} が存在する. Ω_1 を $\gamma(t_1)$ の近傍で $z\in\Omega_1$ なら $f(z)\in\Delta_1$ をみたすものとし, $t_2<t_1$ を $t\in[t_2, t_1]$ なら $\gamma(t)\in\Omega_1$ となるようにとる. $\tau=h[\gamma(t_2)]$ と $\tau=\lambda_1^{-1}(f[\gamma(t_2)])$ において $\lambda(\tau)$ は同じ値 $f[\gamma(t_2)]$ をとることがわかる. ゆえに, 第7章定理8により2を法とする合同部分群に属するモジュラー変換 S があり

$$S[\lambda_1^{-1}(f[\gamma(t_2)])]=h[\gamma(t_2)]$$

が成立する. Ω_1 において $h_1(z)=S[\lambda_1^{-1}(f(z))]$ と定義しよう. 明らかに, (h_1, Ω_1) は $\boldsymbol{h}$ の t_1 までの接続になり, $\lambda(h_1(z))=f(z)$ をみたし $\mathrm{Im}\, h_1>0$ である. これで $\boldsymbol{h}$ がすべての道にそって接続可能なことがいえ, 前に述べたようにこ

れから直ちにピカールの定理をうる.

一価性定理がモジュラー関数と同様に証明において本質的な役割を果していることを読者にわかってもらいたいので，労をおしまず詳しく証明を実行したのである.

4. 線型微分方程式

大域的解析関数の理論により常微分方程式の複素解を非常に一般的に調べることが可能になる. 微分方程式の中で線型のものがもっとも簡単でしかももっとも重要である. n 階の線型方程式は

$$a_0(z)\frac{d^n w}{dz^n}+a_1(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(z)\frac{dw}{dz}+a_n(z)w=b(z) \tag{8}$$

という形のもので，係数 $a_k(z)$ と右辺の $b(z)$ は一価解析関数である. 扱いを簡単にするために，これらの関数が全平面で定義されている場合を考えよう. つまり，整関数と仮定する. (8) の**解**とは，大域的解析関数 $\boldsymbol{f}$ で等式

$$a_0\boldsymbol{f}^{(n)}+a_1\boldsymbol{f}^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{f}'+a_n\boldsymbol{f}=b \tag{9}$$

をみたすもののことである.

すでに注意したように，これは意味のある等式であり，それは $\boldsymbol{f}$ の一つの関数要素 (f, Ω) が(9)の $\boldsymbol{f}$ を f におきかえた式をみたすならば成立する. この性質をみたす関数要素を**局所解**という.

実数の場合を知っている読者は方程式 (9) が n 個の線型独立な解をもつと期待するであろう. これは局所解を考える限りは正しいが，異なる局所解が同じ大域的解析関数の要素になってしまうことがある. いいかえると，複素数の場合には，問題の一部はどの程度局所解が互いに解析接続したものになっているかをみつけることである.

$b(z)$ が恒等的に 0 の場合，(8) は同次 (homogeneous) であるという. これはもっとも重要な場合で，われわれはこの場合だけを扱うであろう. さらに，係数 $a_k(z)$ は共通零点をもたないと仮定してよい; 実際，もし z_0 が共通零点

ならば，すべての係数を $z-z_0$ で割ればよい．解はそのときかわらない．実をいうと係数を有理形関数にしてもよければ，はじめから(8)を $a_0(z)$ で割っておいてもよい．逆に，有理形関数を係数とする方程式が与えられると，各係数は二つの整関数の商で表され，共通分母をかけることにより整関数を係数とする同値な方程式がえられる．ゆえに，係数が極をもつことを許すか許さないかは問題とならない．

$n=1$ のときには，(8)の解は

$$w=e^{-\int\frac{a_1(z)}{a_0(z)}dz}$$

と式で表される．残った問題は積分の多価性を調べることだけで，これはすでに扱った．一方，$n=2$ の場合は一般の場合の特徴的な性格をすべて含んでいることがわかる．このために，2階の同次線型微分方程式を扱えば十分であろう．

4.1. 通常点

点 z_0 が微分方程式

$$a_0(z)w''+a_1(z)w'+a_2(z)w=0 \tag{10}$$

の通常点であるというのは，$a_0(z_0)\neq 0$ のときである．証明すべき中心的な定理は次のことである：

定理 6 z_0 が方程式 (10) の通常点ならば，任意の b_0, b_1 に対し局所解 (f, Ω) で，$z_0\in\Omega$, $f(z_0)=b_0$, $f'(z_0)=b_1$ をみたすものが存在する．このとき，芽 (f, z_0) は一意的に定まる．

---

(10)を $p(z)=-a_1/a_0$, $q(z)=-a_2/a_0$ として

$$w''=p(z)w'+q(z)w \tag{11}$$

とかき直す．仮定より，$p(z), q(z)$ は z_0 の近傍で解析的である．便宜上，$z_0=0$ としよう．

$$\begin{aligned}p(z)&=p_0+p_1z+\cdots+p_nz^n+\cdots\\ q(z)&=q_0+q_1z+\cdots+q_nz^n+\cdots\end{aligned} \tag{12}$$

をテイラー展開とする．

(11)を解くために未定係数法を用いる．もし，定理が正しいとすると，解 $w=f(z)$ はテイラー展開

$$f(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n+\cdots \tag{13}$$

をもち，その係数は次の関係式をみたす：

$$\begin{aligned} &2b_2=b_1p_0+b_0q_0\\ &6b_3=2b_2p_0+b_1p_1+b_1q_0+b_0q_1\\ &\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &n(n-1)b_n=(n-1)b_{n-1}p_0+(n-2)b_{n-2}p_1+\cdots\\ &\qquad\qquad+b_1p_{n-2}+b_{n-2}q_0+b_{n-3}q_1+\cdots+b_0q_{n-2}\\ &\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{14}$$

これはすでに解の一意性を示している．残っている問題は(14)によって係数をきめたときに，整級数(13)の収束半径が正を示すことである．それがいえると，項別微分，積，級数の整頓などはすべて許されて，(13)が f, f' の与えられた初期値をもつ解であることがいえる．

整級数(12)は正の収束半径をもつから，コーシーの不等により定数 M_0, $r_0>0$ が存在し，すべての n に対し

$$\begin{aligned} |p_n|&\leqq M_0r_0^{-n}\\ |q_n|&\leqq M_0r_0^{-n} \end{aligned} \tag{15}$$

が成り立つ．(13)が正の収束半径をもつことを示すには，M, r を適当にとり同様の不等式

$$|b_n|\leqq Mr^{-n} \tag{16}$$

をみたすことをいえばよい．

n に関する帰納法で(16)を証明するという考えは自然である．まず，$n=0$ と $n=1$ のときに (16) が成り立たねばならない；$M>0$ を十分大きく，$r>0$ を十分小さくとっておけば，$|b_0|\leqq M$, $|b_1|\leqq Mr^{-1}$ はみたされる．n より小さ

いときに (16) がすべて成立したと仮定しよう．計算を簡単にするために，$r<r_0$ にしておく．すると，(14)の一般式から直ちに次の評価をうる：

$$n(n-1)|b_n|\leqq MM_0[(1+2+\cdots+(n-1))r^{1-n}+(n-1)r^{2-n}]$$
$$=MM_0\left[\frac{n(n-1)}{2}r+(n-1)r^2\right]r^{-n}.$$

ゆえに，

$$|b_n|\leqq MM_0\left(\frac{r}{2}+\frac{r^2}{n}\right)r^{-n}\leqq MM_0\left(\frac{r}{2}+r^2\right)r^{-n}$$

となり，$M_0(r/2+r^2)\leqq 1$ をみたすようにしておけば(16)が成り立つ．r を十分に小さくしておけば，この条件と前の仮定はみたされる．証明終り．

とくに，$f_0(z_0)=1$, $f_0'(z_0)=0$, $f_1(z_0)=0$, $f_1'(z_0)=1$ をみたす局所解 $f_0(z)$, $f_1(z)$ が存在する．解の一意性から初期値 b_0, b_1 をもつ解は $f(z)=b_0f_0(z)+b_1f_1(z)$ とならねばならない．ゆえに，すべての局所解は $f_0(z)$ と $f_1(z)$ の線型結合である．さらに，$f_0(z)$ と $f_1(z)$ は線型独立なことがわかる．実際，$b_0f_0(z)+b_1f_1(z)=0$ とすると，$z=z_0$ を代入すると $b_0=0$ となり，$f_1(z)$ は定数 0 でないから $b_1=0$ もいえる．

問　題

1. 方程式 $w''=zw$ の二つの線型独立解の，原点を中心とする整級数展開を求めよ．
2. エルミート多項式は
$$H_n(z)=(-1)^ne^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2})$$
によって定義される．$H_n(z)$ は $w''-2zw'+2nw=0$ の解であることを示せ．

4.2 確定特異点　$a_0(z_0)=0$ をみたす点 z_0 は方程式 (10) の**特異点**とよばれる．方程式を(11)の形でかくと，(10)の係数の共通零点はないものと引き続き仮定しているので，この仮定は $p(z)$ と $q(z)$ の少くとも一方が z_0 を極にもつことを意味している．

特異点にもいろいろ種類がある．まず準備として $a_0(z)$ が 1 位の零点をも

つときに生じるもっとも簡単な場合から調べよう．このときは，$p(z)$, $q(z)$ は高々 1 位の極をもち，$z_0=0$ としてローラン展開をかくと次の形になる：

$$p(z)=\frac{p_{-1}}{z}+p_0+p_1z+\cdots$$

$$q(z)=\frac{q_{-1}}{z}+q_0+q_1z+\cdots.$$

このとき，

$$w=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots$$

を(11)に代入して係数を比較すると，

$$\begin{aligned}(17)\qquad &-p_{-1}b_1=b_0q_{-1}\\ &2(1-p_{-1})b_2=b_1p_0+b_1q_{-1}+b_0q_0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &n(n-1-p_{-1})b_n=(n-1)b_{n-1}p_0+(n-2)b_{n-2}p_1+\cdots\\ &\qquad\qquad +b_1p_{n-2}+b_{n-1}q_{-1}+b_{n-2}q_0+\cdots+b_0q_{n-2}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

をうる．

この関係式は(14)とは本質的に異なっている．まず，b_0 だけが任意に選ぶことができて，この方法では高々一つしか線型独立な解はえられない．次に，p_{-1} が 0 か正整数のときには，(17) は解をもたないか，または一つの b_n を任意にとることができる．

p_{-1} が 0 でも正整数でもないときは，結果としてえられた整級数の収束半径が正になることがいえる．前と同じように評価式(15)を用い，$M\geqq|b_0|$ に M をとり，n より小さいときに(16)を仮定する．さらに $r\leqq r_0$ と仮定すると，

$$n|n-1-p_{-1}||b_n|\leqq Mr^{-n}\left\{M_0\left[\frac{n(n-1)}{2}r+(n-1)r^2\right]+|q_{-1}|r\right\}$$

をうる．$(n-1)/|n-1-p_{-1}|$ は有界だから，

$$|b_n|\leqq Mr^{-n}(Ar+Br^2)$$

という形の不等式がすべての n に対して成立する．十分小さい r に対して

は，これから(16)がえられ，収束が示される.

前述のように，この結果は準備としてのものである．われわれの本当の目的は z_0 が確定特異点の場合に (11) を解くことである．**確定特異点**とは，z_0 で $p(z)$ が高々 1 位の極をもち $q(z)$ が高々 2 位の極をもつ場合である.

この仮定の下で，$g(z)$ を $z_0(=0)$ で解析的で $\neq 0$ として，$w=z^{\alpha}g(z)$ の形の解の存在を示す．(11)にこれを代入し簡単な計算をすると，$g(z)$ は微分方程式

$$(18)\qquad g''=\left(p-\frac{2\alpha}{z}\right)g'+\left(q+\frac{\alpha p}{z}-\frac{\alpha(\alpha-1)}{z^2}\right)g$$

をみたさなければならない

任意の α に対しては，これはもとの方程式と同じタイプで何も新しくはえられない．しかし，g の係数が高々 1 位の極をもつように α をとることができる.

$$q(z)=\frac{q_{-2}}{z^2}+\cdots\cdots$$

という展開を q がもつとすると，このためには α は 2 次方程式

$$(19)\qquad \alpha(\alpha-1)-p_{-1}\alpha-q_{-2}=0$$

をみたせばよい．この 2 次方程式を**特性方程式**という．このような α に対しては，上の準備から，$p_{-1}-2\alpha$ が非負整数でないと仮定すれば(11)は $z^{\alpha}g(z)$, $g(0)\neq 0$ という形の解をもつ.

(19)の根を α_1, α_2 としよう．そのとき,

$$\alpha_1+\alpha_2=p_{-1}+1$$

となり，$\alpha_2-\alpha_1=p_{-1}-2\alpha_1+1$ である．ゆえに，α_1 が例外になるのは $\alpha_2-\alpha_1$ が正整数のときである．対称的に，α_2 が例外になるのは $\alpha_2-\alpha_1$ が負整数のときである．ゆえに，特性方程式の 2 根の差が整数でなければ，二つの解 $z^{\alpha_1}g_1(z)$ と $z^{\alpha_2}g_2(z)$ とがえられ，これは明らかに線型独立である． 2 根が等しくなったり差が整数のときには，この方法では一つの解しかえられない.

定理 7　z_0 が方程式 (10) の確定特異点のとき，特性方程式の根を α_1, α_2

とすると，$\alpha_2-\alpha_1$ が整数でなければ(10)は $(z-z_0)^{\alpha_1}g_1(z)$, $(z-z_0)^{\alpha_2}g_2(z)$, $g_1(z_0)\neq 0$, $g_2(z_0)\neq 0$ という形の線型独立な二つの解を z_0 の近傍でもつ．差 $\alpha_2-\alpha_1$ が整数で $\geqq 0$ の場合は，α_2 に対応する方の解の存在はいえる．

一つの解がみつかれば，それに線型独立な解をもう一つ見つけることは難しくない．その方法は微分方程式の教科書をみてほしい．確定特異点でない特異点(不確定特異点)についてはこの本では扱わない．

問　題

1. n を非負整数とするとき，方程式 $(1-z^2)w''-2zw'+n(n+1)w=0$ はルジャンドル多項式

$$P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$$

を解にもつことを示せ．

2. 方程式 $z^2(z+1)w''-z^2w'+w=0$ の二つの線型独立解を，$z=0$ の近傍と $z=-1$ の近傍とで求めよ．
3. ベッセルの方程式 $zw''+w'+zw=0$ は，整関数の解をもつことを示せ．その整級数展開を求めよ．

4.3. 無限遠点における解　$a_0(z)$, $a_1(z)$, $a_2(z)$ が多項式のときには，解が∞の近傍でどのようにふるまうか調べるのは当然である．この問題を扱うもっとも便利な方法は，$z=1/Z$ と変数変換してみることである．

$$\frac{dw}{dz}=-Z^2\frac{dw}{dZ},\quad \frac{d^2w}{dz^2}=2Z^3\frac{dw}{dZ}+Z^4\frac{d^2w}{dZ^2}$$

であるから，方程式(11)は次の形になる：

$$\frac{d^2w}{dZ^2}=-\left(2Z^{-1}+Z^{-2}p\left(\frac{1}{Z}\right)\right)\frac{dw}{dZ}+Z^{-4}q\left(\frac{1}{Z}\right)w. \tag{20}$$

もちろん，$Z=0$ が(20)の通常点または確定特異点になっているときに，∞は(11)のそれであるという．ゆえに，∞が通常点であるのは，(20)の係数が $Z=0$ を除去可能特異点とするときである．これは定義により $-(2z+z^2p(z))$ と $z^4q(z)$ が∞で除去可能特異点をもつというのと同じである．同様に，∞が確定特異点になるのは，これらがそれぞれ∞で高々1位の極，高々2位

の極をもつときである.

特異点の個数が最少の方程式を決定することは面白い. ∞を通常点とすると $q(z)$ は恒等的に 0 でないならば少くとも四つ極をもたねばならない. $q(z)$ が恒等的に 0 の場合, $p(z)$ ができるだけ極を少くもつとすれば一つで, その極を原点におくと $p(z)=-2/z$ となる. このとき, 方程式は

$$\frac{d^2w}{dz^2}=-\frac{2}{z}\frac{dw}{dz}$$

となり, 一般解は $w=az^{-1}+b$ である.

$q(z)$ が定数 0 でないとき, できるだけ特異点を少くすると 2 つの確定特異点の場合がある. 明らかに特異点を 0 と∞におくのが簡単であり, この理由から∞が確定特異点の場合を考えよう. 有限の所には原点にある特異点だけだから, $p(z)=A/z$, $q(z)=B/z^2$ でなければならない. 定数をとりかえて方程式を次の形にかくことができる:

$$z^2w''-(\alpha+\beta-1)zw'+\alpha\beta w=0. \tag{21}$$

ここで明らかに α, β は特性方程式の根になり, $w=z^\alpha$ と $w=z^\beta$ は解である. $\alpha=\beta$ のときには, このほかに解をもたねばならない. それをみつけるには, (21)を

$$\left(z\frac{d}{dz}-\alpha\right)^2 w=0$$

と形式的にかき, $w=z^\alpha W$ とおく. すると

$$\left(z\frac{d}{dz}-\alpha\right)z^\alpha W=z^\alpha\cdot z\frac{dW}{dz}$$

$$\left(z\frac{d}{dz}-\alpha\right)^2 z^\alpha W=z^\alpha\cdot z\frac{d}{dz}\left(z\frac{dW}{dz}\right)$$

となる. 方程式 $\left(z\dfrac{d}{dz}\right)^2 W=0$ は明らかに $W=\log z$ を解にもち, ゆえに(21)の求める解は $w=z^\alpha \log z$ となる.

4.4. 超幾何微分方程式　一つか二つの確定特異点をもつ微分方程式

は自明な解をもつことがわかった．三つめの特異点を許すことにより，新しい解析関数の興味深い種類がえられる．

変数の 1 次変換により 2 階線型微分方程式はやはりそのままであるし特異点の種類がかわらないことも明らかである．したがって，三つの特異点を任意の 3 点に移すことができ，それを $0, 1, \infty$ に選ぶのが一番簡単である．方程式

$$w'' = p(z)w' + q(z)w$$

が有限の所にある特異点としては確定特異点 $0, 1$ だけとすると，$P(z)$, $Q(z)$ を多項式として

$$p(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + P(z)$$

$$q(z) = \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z} + \frac{E}{(z-1)^2} + \frac{F}{z-1} + Q(z)$$

の形でなければならない．∞ にある特異点が確定点であれば，∞ で $2z + z^2 p(z)$ が高々 1 位の極をもち，$z^4 q(z)$ が高々 2 位の極をもつ．この条件から，$P(z)$ と $Q(z)$ は恒等的に 0 となり，$D+F=0$ が成り立たねばならない．明らかにこれは十分条件でもあり，$p(z)$, $q(z)$ の形を再びかくと，

$$p(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}, \quad q(z) = \frac{C}{z^2} - \frac{D}{z(z-1)} + \frac{E}{(z-1)^2}$$

となる．

原点での特性方程式は

$$\alpha(\alpha-1) = A\alpha + C$$

である．その根を α_1, α_2 とすると，$A = \alpha_1 + \alpha_2 - 1$, $C = -\alpha_1\alpha_2$ となる．同様に，1 における特性方程式の根を β_1, β_2 とすると，$B = \beta_1 + \beta_2 - 1$, $E = -\beta_1\beta_2$ となる．∞での特性方程式を書き下すために，$-2z - z^2 p(z)$ と $z^4 q(z)$ の最低次の項の係数はそれぞれ $-(2+A+B)$, $C-D+E$ になることに注意する．ゆえに，根を γ_1, γ_2 とすると，

$$\gamma_1 + \gamma_2 = -A - B - 1, \quad \gamma_1\gamma_2 = -C + D - E$$

をみたす．これから，関係式

$$\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=1 \tag{22}$$

がえられ，方程式は次の形に書きなおせる：

$$w''+\left(\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z}+\frac{1-\beta_1-\beta_2}{z-1}\right)w' \tag{23}$$
$$+\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{z^2}-\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2}{z(z-1)}+\frac{\beta_1\beta_2}{(z-1)^2}\right)w=0.$$

例外的な場合をさけるために，差 $\alpha_2-\alpha_1, \beta_2-\beta_1, \gamma_2-\gamma_1$ のいずれもが整数ではないと仮定する．次は方程式 (23) を簡単にすることが問題である．4.2節で $w=z^\alpha g(z)$ とおくと $g(z)$ に対し同様な微分方程式，すなわち(18)をうることを見た．もとの方程式が $w=z^{\alpha_1}g_1(z)$, $w=z^{\alpha_2}g_2(z)$ の形の解をもつので，変換された方程式(18)は $g(z)=z^{\alpha_1-\alpha}g_1(z)$, $g(z)=z^{\alpha_2-\alpha}g_2(z)$ の形の解をもつことがいえる．ゆえに，計算によっても確かめられるように，(18)の特性方程式は $\alpha_1-\alpha, \alpha_2-\alpha$ を根にもつ．同時に，∞にある特異点に対応する根は，γ_1, γ_2 から $\gamma_1+\alpha, \gamma_2+\alpha$ にかわる．まったく同じ方法で，解から $(z-1)^\beta$ をくくりだしてみると，えられた方程式の解の指数は，1において β だけへり，∞において β だけふえることがわかる．$\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$ にとるのが自然であろう．こうしてえられた方程式では，6個の指数がそれぞれ 0, $\alpha_2-\alpha_1$, 0, $\beta_2-\beta_1$, $\gamma_1+\alpha_1+\beta_1$, $\gamma_2+\alpha_1+\beta_1$ となる．昔からの習慣にしたがって，$a=\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$, $b=\alpha_1+\beta_1+\gamma_2$, $c=1+\alpha_1-\alpha_2$ とおく．関係式(22)から，$c-a-b=\beta_2-\beta_1$ である．したがって，こうしてえられた新しい微分方程式は

$$w''+\left(\frac{c}{z}+\frac{1-c+a+b}{z-1}\right)w'+\frac{ab}{z(z-1)}w=0$$

という形になり，整理して

$$z(1-z)w''+[c-(a+b+1)z]w'-abw=0 \tag{24}$$

をうる．これを**超幾何微分方程式**という．(23) の解は(24)の解に $z^{\alpha_1}(z-1)^{\beta_1}$ をかけたものに等しいことを証明した．指数の差 $c-1, a-b, a+b-c$ がすべ

て整数でないことは仮定されている．

今までの理論から，(24)は $w=\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ の形の解をもっている．この整級数を(24)に代入してほんの少し計算をすると，係数は次の漸化式をみたすことがわかる：

$$(n+1)(n+c)A_{n+1}=(n+a)(n+b)A_n.$$

この関係は簡単な形をしているので解を具体的に書くことができる．$A_0=1$ とすると，**超幾何関数**として知られている関数

$$F(a, b, c, z)=1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}z+\frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}z^2 +\frac{a(a+1)(a+2)\cdot b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}z^3+\cdots\cdots$$

は超幾何微分方程式の解である．この関数は，c が0か負整数でないならば定義できる．

超幾何級数の収束半径は計算によっても容易に求まるが，純粋な推理を用いる方が教育的である．まず，$F(a, b, c, z)$ は1を通らず原点にもどってこないような任意の道にそって解析接続が可能なことはわかっている．ゆえに，$F(a, b, c, z)$ の一価な枝が単位円 $|z|<1$ で定義できる(何故なら，単位円は単連結である)．ゆえに，収束半径は少くとも1である．もしそれが1より大きいならば，$F(a, b, c, z)$ は整関数になるであろう．無限遠点の近くでは，∞ の近傍で存在がわかっている解 $z^{-a}g_1(z)$, $z^{-b}g_2(z)$ の線型結合にそれはなる，しかし，この線型結合が一価になるのは明らかに a か b かが整数のときだけである．a が整数ならば仮定より b は整数ではなく，$F(a, b, c, z)$ は $z^{-a}g_1(z)$ の定数倍になる．リュービルの定理より，a が正整数なら $F(a, b, c, z)$ は恒等的に0となり矛盾となる．ゆえに，収束半径が∞になりうるのは a (または b) が0か負整数の場合だけで，そのときは超幾何級数は有限項で多項式になってしまう．

原点の近傍で，$z^{1-c}g(z)$ の形の解も存在する．ここで，$g(z)$ は6個の指数が $\alpha_2-\alpha_1, 0, 0, \beta_2-\beta_1, \gamma_1+\alpha_2+\beta_1, \gamma_2+\alpha_2+\beta_1$ の超幾何微分方程式をみたす．

これから，$g(z)=F(1+a-c, 1+b-c, 2-c,z)$ とおけることが直ちにわかる．原点の近傍で線型独立な二つの解は $F(a, b, c, z)$ と $z^{1-c}F(1+a-c, 1+b-c, 2-c,z)$ であることが示された．

1の近傍での解は，同様の方法できちんと求めることができる．しかし，z を $1-z$ におきかえ，α, β 達をとりかえる方が容易である．結論としては，$F(a, b, 1+a+b-c, 1-z)$ と $(1-z)^{c-a-b}F(c-b, c-a, 1-a-b+c, 1-z)$ が，1の近傍での線型独立解である．∞の近傍での解も同様にして求めることができる．

三つの確定特異点をもつ一般の2階線型微分方程式は超幾何関数を用いて具体的に解くことができることを説明した．解の多価性の構造を完全に求めることも，いささか労力はいるけれども明らかに可能である．

問　題

1. $(1-z)^{-\alpha}=F(\alpha, \beta, \beta, z)$, $\log 1/(1-z)=zF(1, 1.2, z)$ を示せ．
2. $F(a, b, c, z)$ の導関数を超幾何関数として表せ．
3. 次の積分表示を導け：

$$F(a, b, c, z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt.$$

4. 微分方程式 $w''=pw'+qw$ の線型独立解を w_1, w_2 とするとき，その商 $\eta=w_2/w_1$ は次の微分方程式をみたすことを示せ．

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2=-2q-\frac{1}{2}p^2+p'.$$

4.5. リーマンの観点

リーマンは次のような考えを強く提案した．解析関数は，その具体的な式表示と同様に，多分それよりはもっと良く，特異点でのその一般的な性質によって定義されうる．自明な例として，有理関数は極とそこでの特異部によって決ってしまう．

超幾何微分方程式の解がこの種類の性質によって特徴づけられることを，リーマンにしたがって示したい．次に書きあげる四つの性質をもつ関数要素 (f, Ω) の集合$\boldsymbol{F}$ を考える．

1. $\boldsymbol{F}$ は完備である．すなわち，任意の $(f, \Omega)\in\boldsymbol{F}$ に対し，その解析接続は常にまた $\boldsymbol{F}$ に属する．ここで，$\boldsymbol{F}$ に属する任意の二つの関数要素が互い

に解析接続になることは要求しないので，$\boldsymbol{F}$ は大域的解析関数のいくつかからできている．

2. $\boldsymbol{F}$ は線型である．すなわち，$(f_1, \Omega)\in\boldsymbol{F}$, $(f_2, \Omega)\in\boldsymbol{F}$ ならば任意の定数 c_1, c_2 に対し $(c_1f_1+c_2f_2, \Omega)\in\boldsymbol{F}$ となる．さらに，$\boldsymbol{F}$ は高々2次元とする．すなわち，同じ Ω に対する三つの $(f_1, \Omega)\in\boldsymbol{F}$, $(f_2,\Omega)\in\boldsymbol{F}$, $(f_3, \Omega)\in\boldsymbol{F}$ に対しては，少くとも一つが0ではない定数 c_1, c_2, c_3 があり $c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3=0$ が Ω で恒等的に成り立つようにできる．

3. $\boldsymbol{F}$ の関数の特異点は，有限の所にあるのは $0, 1$ だけである．さらに，∞ も特異点につけ加えておく．正確にいうと，任意の $(f, \Omega)\in\boldsymbol{F}$ は，$0, 1, \infty$ を通らない任意の道にそってつねに解析接続できる．

4. 特異点における挙動については，$\boldsymbol{F}$ の中に，0の近くで $z^{\alpha_1}, z^{\alpha_2}$ のようにふるまうもの，1の近くで $(z-1)^{\beta_1}, (z-1)^{\beta_2}$ のように，∞ の近くで $z^{-\gamma_1}$, $z^{-\gamma_2}$ のようにふるまうものがあると仮定する．正確にいうと，0の近傍 Δ で定義された解析関数 $g_1(z), g_2(z)$ があり，$g_1(0)\neq 0$, $g_2(0)\neq 0$ であり，$0\notin\Omega\subset\Delta$ となる単連結領域 Ω に対し $(z^{\alpha_1}g_1(z), \Omega)\in\boldsymbol{F}$, $(z^{\alpha_2}g_2(z), \Omega)\in\boldsymbol{F}$ となっている．1と ∞ でも同様に定式化できる．

微分方程式(23)の解は，$\alpha_2-\alpha_1$, $\beta_2-\beta_1$, $\gamma_2-\gamma_1$ がいずれも整数でないと仮定すると，以上の性質をもっていることを思い出してほしい．さらに，関係式 $\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=1$ がこのときは成り立っている．この二つを仮定してその制限の下に，1から4までの性質をみたす集合 $\boldsymbol{F}$ が存在し唯一つであることを証明しよう．したがって，$\boldsymbol{F}$ は微分方程式(23)の局所解の全体と等しくなってしまう．

リーマンは $\boldsymbol{F}$ に属する任意の関数要素を

$$P\begin{Bmatrix}0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1, & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix}$$

という記号でかいた．P は個々の関数を表すものではないが，これはそれほど重要ではない．一意性が証明できれば，

$$P\begin{Bmatrix}0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1, & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix}=z^{\alpha}(z-1)^{\beta}P\begin{Bmatrix}0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1-\alpha & \beta_1-\beta & \gamma_1+\alpha+\beta, & z \\ \alpha_2-\alpha & \beta_2-\beta & \gamma_2-\alpha+\beta & \end{Bmatrix}$$

$$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1, & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \gamma_1, & 1-z \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix}$$

というような等式が，少し注意をして適当な解釈をすれば導かれる．その中には全く精巧なものがあるが，このような関係を容易に認識できるという事実がリーマンの観点の動機の一つである．

一意性を証明するために，0, 1 を含まない単連結領域 Ω で定義された二つの線型独立な関数要素 $(f_1, \Omega), (f_2, \Omega) \in \boldsymbol{F}$ をとる．このような関数要素は，任意の Ω に対し必らず存在する．何故なら，$z^{\alpha_1}g_1(z)$ と $z^{\alpha_2}g_2(z)$ は共通の定義域で線型独立であり，それは 0, 1 を通らないで Ω に終点をもつ道にそって解析接続でき，その接続が線型独立な $(f_1, \Omega), (f_2, \Omega)$ を定義する．性質 1 により，これらは $\boldsymbol{F}$ に属する．(f, Ω) を別に $\boldsymbol{F}$ からとると，

$$cf + c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0$$
$$cf' + c_1 f_1' + c_2 f_2' = 0$$
$$cf'' + c_1 f_1'' + c_2 f_2'' = 0$$

という等式があり，これから次の式をうる:

$$\begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 \\ f' & f_1' & f_2' \\ f'' & f_1'' & f_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

この式を，

$$f'' = p(z)f' + q(z)f$$

という形でかく．ここで，

$$(25) \qquad p(z) = \frac{f_1 f_2'' - f_2 f_1''}{f_1 f_2' - f_2 f_1'}, \quad q(z) = -\frac{f_1' f_2'' - f_2' f_1''}{f_1 f_2' - f_2 f_1'}$$

である．この分母は定数 0 ではない．何故なら，それが恒等的に 0 なら，f_1 と f_2 が線型従属になってしまうからである．

さて，(25) 式は，f_1, f_2 を $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0$ として $c_{11}f_1 + c_{12}f_2$, $c_{21}f_1 + c_{22}f_2$ にそれぞれおきかえてもかわらないことに注意する．これは，$p(z), q(z)$ が f_1, f_2 のとり方にかかわらず同じであることを示し，ゆえに，それらは全平

面から 0, 1 を抜いた残りで一価関数を定義している．

$p(z), q(z)$ の原点の近傍での挙動をみるために，$f_1=z^{\alpha_1}g_1(z)$, $f_2=z^{\alpha_2}g_2(z)$ としてみよう．簡単な計算により

$$f_1f_2'-f_2f_1'=(\alpha_2-\alpha_1)z^{\alpha_1+\alpha_2-1}(C+\cdots)$$
$$f_1f_2''-f_2f_1''=(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_1+\alpha_2-1)z^{\alpha_1+\alpha_2-2}(C+\cdots)$$
$$f_1'f_2''-f_2'f_1''=\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)z^{\alpha_1+\alpha_2-3}(C+\cdots)$$

となる．ここで，最後の（　）の中はいずれも原点の近傍での解析関数を表し原点における値は共通に $C=g_1(0)g_2(0)$ である．ゆえに，$p(z)$ は原点で 1 位の極をもち留数は $\alpha_1+\alpha_2-1$ であり，$q(z)$ のローラン展開は $-\alpha_1\alpha_2/z^2$ という項から始まる．1, ∞ においても同様の結果がえられる．結局，

$$p(z)=\frac{\alpha_1+\alpha_2-1}{z}+\frac{\beta_1+\beta_2-1}{z-1}+p_0(z) \tag{26}$$

となり，$p_0(z)$ は 0, 1 に極をもたない．定義式 (24) により，$p(z)$ は解析関数の対数微分になっているから，その 0 と 1 以外の極は 1 位の極だけで留数は正整数である．さらに，$p(z)$ の ∞ における展開は $-(\gamma_1+\gamma_2+1)/z$ という項から始まっている．ゆえに，$p(z)$ の極は有限個で留数の和は $-(\gamma_1+\gamma_2+1)$ でなければならない．関係式 $(\alpha_1+\alpha_2-1)+(\beta_1+\beta_2-1)=-(\gamma_1+\gamma_2+1)$ より，0 と 1 以外には極をもたないことがわかる．(26) をみると，$p_0(z)$ は極をもたず∞で 0 になるから恒等的に 0 になる．

0, 1 を除いては $f_1f_2'-f_2f_1'\neq 0$ であるから，$q(z)$ は

$$q(z)=-\frac{\alpha_1\alpha_2}{z^2}-\frac{\beta_1\beta_2}{(z-1)^2}+\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+q_0(z)$$

の形になり，$q_0(z)$ は有限平面内に極をもたない．∞ における展開は $-\gamma_1\gamma_2/z^2$ から始まる．それから，

$$A=-B=-(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2)$$

で $q_0(z)$ が恒等的に 0 になることがわかる．結果をまとめると，f は方程式

$$w''+\left(\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z}+\frac{1-\beta_1-\beta_2}{z-1}\right)w'+$$
$$\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{z^2}-\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2}{z(z-1)}+\frac{\gamma_1\gamma_2}{(z-1)^2}\right)w=0$$

の解になることがいえ，この式は(23)にほかならない．

これから一意性の証明が完成する．何故なら，1から4までをみたす集合 $\boldsymbol{F}$ は(23)の局所解の集合 $\boldsymbol{F}_0$ の部分集合になることがいえた．0，1を含まない単連結領域 Ω では二つの線型独立な関数要素 (f_1, Ω), (f_2, Ω) が $\boldsymbol{F}$ の中にあることを知っている．任意の $(f, \Omega)\in\boldsymbol{F}_0$ は $(c_1f_1+c_2f_2, \Omega)$ の形にかけ，ゆえに $\boldsymbol{F}$ に含まれる．最後に，Ω が単連結でない場合，$(f, \Omega)\in\boldsymbol{F}_0$ は Ω の単連結部分領域に制限したものの解析接続になっている．その制限したものは $\boldsymbol{F}$ に属するから，性質1により $(f, \Omega)\in\boldsymbol{F}$ をうる．

問　題　略　解

第1章

問題 (p. 2)　**1.** (i) $-11-2i$.　(ii) $-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$.　(iii) $\frac{-33+56i}{169}$.　(iv) $(1-i)^n\left\{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n+1\right\}$ $=(1-i)^n(i^n+1)$.　$(1-i)^4=(-2i)^2=-4$ に注意．答．$n=4k$, $4k+1$ のとき $2\cdot(-4)^k$, $n=4k+2$ のとき 0, $n=4k+3$ のとき $(-4)^{k+1}$.　**2.** (i) 実部 $x^4-6x^2y^2+y^4$, 虚部 $4x^3y-4xy^3$.　(ii) 実部 $\frac{x}{x^2+y^2}$, 虚部 $\frac{-y}{x^2+y^2}$.　(iii) 実部 $\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}$, 虚部 $\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}$. (iv) 実部 $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, 虚部 $\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.　**3.** 略.

問題 (p. 4)　**1.** (i) $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.　(ii) $\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$.　(iii) $\pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\right)$. (iv) $\pm\frac{\sqrt{3}-i}{2}$.　**2.** $\pm\left(\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right)$.　**3.** $\sqrt[4]{i}$ は $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\right)$ と $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\right)$.　$\sqrt[4]{-i}$ はこの共役複素数.　**4.** $(-\alpha-\beta i+\sqrt{D})/2$.　$D=(\alpha+\beta i)^2-4(\gamma+i\delta)$ の平方根の公式 (6) による計算は略.

問題 (p. 6)　**1.** 略.　**2.** 略.

問題 (p. 9)　**1.** 略.　**2.** 40, 5/2.　**3.** $|a|=1$ のとき，$|1-\bar{a}b|=|a|\,|1-\bar{a}b|=|a-b|$ となる。∴ $a\neq b$ なら $|a-b|/|1-\bar{a}b|=1$.　$|a|=|b|=1$ で $a=b$ なら分母が 0 になりそれは除かねばならぬ.　**4.** $|a|\neq|b|$ のとき，$z=(b\bar{c}-\bar{a}c)/(|a|^2-|b|^2)$.　**5.** $\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2-|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i|^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_i\bar{a}_ib_j\bar{b}_j-\sum_{i,j=1}^{n}a_ib_i\bar{a}_j\bar{b}_j=\sum_{i\neq j}(a_i\bar{a}_ib_j\bar{b}_j-a_ib_i\bar{a}_j\bar{b}_j)=\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i\bar{a}_ib_j\bar{b}_j+a_j\bar{a}_jb_i\bar{b}_i-a_ib_i\bar{a}_j\bar{b}_j-a_jb_j\bar{a}_i\bar{b}_i)=\sum_{1\leq i<j\leq n}|a_i\bar{b}_j-a_j\bar{b}_i|^2$.

問題 (p. 12)　**1.** $|1-\bar{a}b|^2-|a-b|^2=(1-|a|^2)(1-|b|^2)>0$.　**2.** n のとき成立するとして $n+1$ のとき，$(\sum_1^n|a_i|^2+|a_{n+1}|^2)(\sum_1^n|b_i|^2+|b_{n+1}|^2)-(\sum_1^n a_ib_i+a_{n+1}b_{n+1})(\sum_1^n\bar{a}_i\bar{b}_i+\bar{a}_{n+1}\bar{b}_{n+1})=(\sum_1^n|a_i|^2\sum_1^n|b_i|^2-|\sum_1^n a_ib_i|^2)+\sum_1^n|a_{n+1}\bar{b}_i-a_i\bar{b}_{n+1}|^2\geqq 0$.　**3.** $|\sum\lambda_ia_i|\leqq\sum|\lambda_i|\,|a_i|<\sum\lambda_i=1$.　**4.** z が存在すれば，$2|a|=|z+a+a-z|\leqq|z+a|+|z-a|=2|c|$,　∴ $|a|\leqq|c|$. 逆に，$|a|\leqq|c|$ ならば $z=|c|a/|a|$ は与式をみたす．与式の両辺を 2 乗して，$|z|^2=2|c|^2-|a|^2-|z^2-a^2|$ をうる．$|z|^2-|a|^2\leqq|z^2-a^2|\leqq|z|^2+|a|^2$ より，$|c|^2-|a|^2\leqq|z|^2\leqq|c|^2$ をうる．$z=i\sqrt{|c|^2-|a|^2}\cdot a/|a|$, $|c|a/|a|$ のとき等号となり，最小値 $\sqrt{|c|^2-|a|^2}$，最大値 $|c|$.

問題 (p. 15)　**1.** $\pm i\bar{a}$.　**2.** 正三角形の頂点をなす $\Leftrightarrow(a_2-a_1)/(a_3-a_1)=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$ $\Leftrightarrow\{(a_2-a_1)/(a_3-a_1)\}^2-\{(a_2-a_1)/(a_3-a_1)\}+1=0\Leftrightarrow$ 与式.　**3.** $a+(a-b)i$ と $b+(a-b)i$, $a-(a-b)i$ と $b-(a-b)i$, $\{(a+b)\pm(a-b)i\}/2$.　**4.** 連立方程式 $|a-a_i|^2=r^2$ より中心 $a=\frac{|a_1|^2(a_2-a_3)+|a_2|^2(a_3-a_1)+|a_3|^2(a_1-a_2)}{\bar{a}_1(a_2-a_3)+\bar{a}_2(a_3-a_1)+\bar{a}_3(a_1-a_2)}$，半径 $r=\frac{|(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)|}{|\bar{a}_1(a_2-a_3)+\bar{a}_2(a_3-a_1)+\bar{a}_3(a_1-a_2)|}$.

問題 (p. 17) **1.** $\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi$, $\cos 4\varphi=\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi$, $\sin 5\varphi=5\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^2\varphi\sin^3\varphi+\sin^5\varphi$. **2.** 等比級数 $1+(\cos\varphi+i\sin\varphi)+\cdots+(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=\left(\sin\frac{n+1}{2}\varphi\cos\frac{n\varphi}{2}+i\sin\frac{n+1}{2}\varphi\sin\frac{n\varphi}{2}\right)/\sin\frac{\varphi}{2}$. **3.** 1の5乗根は 1, $\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$, $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pm i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$. 1の10乗根は1の5乗根とその符号をかえたもの. **4.** $\omega^h\neq1$ より等比級数の和として, $(1-\omega^{nh})/1-\omega^h)=0$. **5.** 公比 $-\omega^h$ より, n が偶数のとき 0. n が奇数のとき, $2/(1+\omega^h)$.

問題 (p. 18) **1.** $|a|=|b|\neq0$, $\bar{a}c-b\bar{c}=0$ が必要十分条件. **2.** 解が一意的でないので略. 例えば, 楕円は定義から $|z-a|+|z-b|=\alpha$, $\alpha>|a-b|>0$ とも表せるし, $az^2+\bar{a}\bar{z}^2+2\alpha z\bar{z}+2bz+2\bar{b}\bar{z}+\beta=0$, α,β は実数, $\alpha-|a|>0$, $\beta|a|^2+2\alpha|b|^2-\bar{a}b^2-a\bar{b}^2-\alpha^2\beta>0$ とも表せる. **3.** 略. **4.** 円 C を $|z-a|=r$, 平行2直線 l_1, l_2 を $z=c+bt$, $z=d+bt$ (t 実数) とおく. C と l_1 の交点は, $|b|^2t^2+\{b(\bar{c}-\bar{a})+\bar{b}(c-a)\}t+|c-a|^2-r^2=0$ の2根 t_1, t_2 により $z_i=c+bt_i$ とかける. 中点 P は $(z_1+z_2)/2=(\bar{b}c-b\bar{c}+b\bar{a}+\bar{b}a)/2\bar{b}$ となる. 同様に C と l_2 の2交点の中点 Q は $(\bar{b}d-b\bar{d}+b\bar{a}+\bar{b}a)/2\bar{b}$ で, PQ を通る直線 l は $z=\{(\bar{b}c-b\bar{c}+b\bar{a}+\bar{b}a)+(\bar{b}d-b\bar{d}-\bar{b}c+b\bar{c})t\}/2\bar{b}$. この式で $z=a$ とおくと, $t=(\bar{b}a-\bar{b}c+b\bar{c}-b\bar{a})/(d\bar{b}-b\bar{d}-\bar{b}c+b\bar{c})$ となり, $\bar{t}=t$ がわかる. t は実数で, l は a を通る. l, l_1 の変数 t の係数の比は $(\bar{b}d-b\bar{d}-\bar{b}c+b\bar{c})/2|b|^2$ で, 共役をとると符号がかわり純虚数である. ゆえに l と l_1 は直交する. **5.** a, $1/\bar{a}$ は単位円 C_1:$|z|=1$ の内外にわかれる. ゆえに, a, $1/\bar{a}$ を通る円 C_2:$|z-b|=r$ は C_1 と交わり, 1交点を z_0 とする. 条件を式にかくと, ① $z_0\bar{z}_0=1$, ② $|z_0|^2+|b|^2-z_0\bar{b}-\bar{z}_0b=r^2$, ③ $|a|^2+|b|^2-a\bar{b}-\bar{a}b=r^2$, ④ $(1/|a|^2)+|b|^2-(\bar{b}/\bar{a})-(b/a)=r^2$ である. C_1, C_2 の z_0 を通る直径の方程式は, $z=z_0t$, $z=b+(z_0-b)t$ で, 直交を示すには $(z_0-b)/z_0=1-(b/z_0)$ が純虚数になることをいう. ④を $1+|a|^2|b|^2-a\bar{b}-\bar{a}b=|a|^2r^2$ とかきかえ, ③から引き, $-1+|b|^2=r^2$ をうる. ①, ②より $2\mathrm{Re}(b/z_0)=1+|b|^2-r^2=2$ で, $(z_0-b)/z_0$ は純虚数である.

問題 (p. 21) **1.** (28)より, $d(z,z')=2\Leftrightarrow(1+|z|^2)(1+|z'|^2)-|z-z'|^2=0\Leftrightarrow|z\bar{z}'+1|^2=0\Leftrightarrow z\bar{z}'=-1$. **2.** 対角線が原点を通り長さ2より, 8頂点の座標は $(\pm1/\sqrt{3}, \pm1/\sqrt{3}, \pm1/\sqrt{3})$ である. 立体射影により像は $(\pm1\pm i)/(\sqrt{3}\pm1)$. 複号はすべての組合せをとる. **3.** 略. **4.** 初等幾何または座標を用いて計算し $NZ\cdot Nz=NZ'\cdot Nz'=2$ をうる. $\therefore\ \triangle NZZ'\backsim\triangle Nz'z$. $ZZ'^2/z'z^2=(NZ/Nz')\cdot(NZ'/Nz)=4/(Nz^2\cdot Nz'^2)$ をうる. 2点の距離を数でかきなおすと, $ZZ'=d(z,z')$, $z'z$(これは z' と z の距離)$=|z-z'|$, $Nz'^2=1+|z'|^2$, $Nz^2=1+|z|^2$. **5.** 円 $|z-a|=R$ 上の点で, $|z|$ が最大の点を z_0, 最小の点を z_1 とする. z をその円上を動かし, $d(z,z_0)=2|z-z_0|/\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z_0|^2)}$ を最大にすることを考えると, 最大値は z_1 でとり, その最大値の半分が求める半径である. 答. $2R/\sqrt{(1+(R-|a|)^2)(1+(R+|a|)^2)}$.

第2章

問題 (p. 29) **1.** 略. 微積分の教科書を見よ. 本質的な変更なしに適用可. **2.** $z^2=$

$(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i(2xy)$. $\partial(x^2-y^2)/\partial x=2x=\partial(2xy)/\partial y$, $\partial(x^2-y^2)/\partial y=-2y=-\partial(2xy)/\partial x$. z^3 は略. **3.** 条件は $c=-3a$, $b=-3d$. 共役調和関数 $dx^3+3ax^2y-3dxy^2-ay^3$. 解析関数 $(a+di)z^3$. **4.** $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ は解析関数で $|f|^2=u^2+v^2=c$(一定) とする. x,y で偏微分して, $2uu_x+2vv_x=0$, $2uu_y+2vv_y=0$ をうる. コーシー・リーマンの関係を用いて, $uu_x-vu_y=0$, $vu_x+uu_y=0$ となり, $(u^2+v^2)u_x=0$, $(u^2+v^2)u_y=0$ をうる. $u\neq 0$ の所では $u_x=u_y=0$ より u は定数となり, 連続性から u は全体で定数となる. 同様にして v も定数になり f は定数になる. **5.** $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とすると $\overline{f(\bar{z})}=u(x,-y)-iv(x,-y)$ である. $U(x,y)=u(x,-y)$, $V(x,y)=-v(x,-y)$ とおく. $U_x(x,y)=u_x(x,-y)$, $U_y(x,y)=-u_y(x,-y)$, $V_x(x,y)=-v_x(x,-y)$, $V_y(x,y)=v_y(x,-y)$ である. $\therefore U_x=V_y$, $U_y=-V_x \Leftrightarrow u_x=v_y$, $u_y=-v_x$. **6.** $U(x,y)=u(x,-y)$ とおく. $U_{xx}(x,y)=u_{xx}(x,-y)$, $U_{yy}(x,y)=u_{yy}(x,-y)$. $\therefore U_{xx}+U_{yy}=0 \Leftrightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$. **7.** $\partial u/\partial\bar{z}=\{(\partial u/\partial x)+i(\partial u/\partial y)\}/2$. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar{z}}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\bar{z}}\right)-i\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\bar{z}}\right)\right\}=\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+i\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-i\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0$.

問題 (p. 34) **1.** $z+\dfrac{1}{3(z-1)}+\dfrac{\omega^2}{3(z-\omega)}+\dfrac{\omega}{3(z-\omega^2)}$, $\dfrac{1}{8z}+\dfrac{2}{z+1}-\dfrac{1}{(z+1)^2}-\dfrac{17}{8(z+2)}-\dfrac{5}{4(z+2)^2}-\dfrac{1}{2(z+2)^3}$. $\left(\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)$. **2.** $P\left(\alpha_j+\dfrac{1}{\zeta}\right)/Q\left(\alpha_j+\dfrac{1}{\zeta}\right)$ の分母分子に ζ^n をかけると, 分子の n 次以上の項は $P(\alpha_j)\zeta^n$ で分母の最高次の項は $Q'(\alpha_j)\zeta^{n-1}$ である. (Q を1次式の積に因数分解して計算する). あとは本のやり方で部分分数に展開する. 定数は $z\to\infty$ として決めればよい. **3.** $P(z)=\sum_{k=1}^{n} c_k Q(z)/(Q'(\alpha_k)(z-\alpha_k))$ が求めるもの. ただし, $Q(z)=(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)$. もし答が2つあると, 差をとれば n 個の点 α_k で0となる高々 $n-1$ 次式になり, それは0. ゆえに答は一意的. **4.** 有理関数の零点は有限個より, 2つの有理関数が $|z|=1$ 上で等しければ恒等的に等しくなる. $R(z)=az^l\cdot(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)/((z-\beta_1)\cdots(z-\beta_m))$ が $|z|=1$ のとき $|R(z)|=1$ とせよ. $|z|=1$ のとき, $\bar{z}=1/z$, $|\bar{z}|=1$ で, $R(\bar{z})\overline{R(\bar{z})}=1$ となる. $R(\bar{z})=R(1/z)=a\,z^{m-n-l}(1-\alpha_1 z)\cdots(1-\alpha_n z)/((1-\beta_1 z)\cdots(1-\beta_m z))$, $1/\overline{R(\bar{z})}=z^{-l}(z-\bar{\beta}_1)\cdots(z-\bar{\beta}_m)/(\bar{a}(z-\bar{\alpha}_1)\cdots(z-\bar{\alpha}_n))$ で, この2つは $|z|=1$ のとき等しいから恒等的に等しい. $\therefore n=m$ で, 順序を並べかえて $\beta_k=1/\bar{\alpha}_k$ $(k=1,\cdots,n)$ をうる. (これが零点と極の関係である). さらに, この恒等式から $|a\bar{\alpha}_1\cdots\bar{\alpha}_n|=1$ もわかる. これらを $R(z)$ の初めの式に代入すると, $R(z)=cz^l(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)/((\bar{\alpha}_1 z-1)\cdots(\bar{\alpha}_n z-1))$ がわかる. 但し $|c|=1$, l は整数. 逆に, $R(z)$ がこの形なら $|z|=1$ のとき $|R(z)|=1$ となることは第1章1.4節問3より明らか. **5.** 前問と同じ記号を使う. $|z|=1$ のとき $R(z)=\overline{R(1/\bar{z})}$ より, $|z|=1$ のとき $R(z)$ が実数になるための必要十分条件は, $m-n=2l$, $a\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_m=\bar{a}\alpha_1\cdots\alpha_n$, 重複度だけ重複して並べて全体として $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}=\{1/\bar{\alpha}_1,\cdots,1/\bar{\alpha}_n\}$, $\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}=\{1/\bar{\beta}_1,\cdots,1/\bar{\beta}_m\}$ となること. **6.** $R(z)$ を34頁の(14)の形に部分分数に展開して考える. $G(z)$ の次数を p_∞, $G_j(\zeta)$ の次数を p_j とすると, $R(z)$ の位数 n は $p_\infty+p_1+\cdots+p_q$ である. (14)の両辺を z で微分してみると, $R'(z)$ の位数は, $p_\infty\geqq 1$ のとき, $(p_\infty-1)+(p_1+1)+\cdots+(p_q+1)=n+q-1$, $p_\infty=0$ のと

き $p_\infty+(p_1+1)+\cdots+(p_q+1)=n+q$ となる．$R'(z)$ の位数が最大になるのは $p_\infty=0, q=n$ のときで，例えば $R(z)=(1/(z-\beta_1))+\cdots+(1/(z-\beta_n))$, ($\beta_1,\cdots,\beta_n$ は相異なる) は一例である．最小は $p_\infty=n, q=0$ のとき，$R(z)=z^n$ は1例である．

問題 (p. 39〜p. 40) **1.** $a_n\to A$ とせよ．$\varepsilon>0$ をとると n_0 がきまり，$n\geqq n_0$ なら $|a_n-A|<\varepsilon$ をみたすようにできる．$|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{n_0}|, |A|+\varepsilon$ の中の最大を M とすると，すべての n に対し $|a_n|\leqq M$ となり，数列 $\{a_n\}$ は有界である． **2.** $z_n'=z_n-A$ とおくと，$((z_1+\cdots+z_n)/n)-A=(z_1'+\cdots+z_n')/n$ となり，$A=0$ のとき証明すればよい．任意に $\varepsilon>0$ を与える．$z_n\to 0$ より，$n\geqq n_1$ なら $|z_n|<\varepsilon/2$ となるように n_1 がとれる．$|z_1+\cdots+z_{n_1}|/n_2<\varepsilon/2$ に n_2 をとり，$n_0=\max(n_1, n_2)$ とする．$n\geqq n_0$ のとき
$\left|\dfrac{z_1+\cdots+z_n}{n}\right|\leqq\dfrac{|z_1+\cdots+z_{n_1}|}{n}+\dfrac{1}{n}(|z_{n_1+1}|+\cdots+|z_n|)<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{n-n_1}{n}\cdot\dfrac{\varepsilon}{2}\leqq\varepsilon.$ **3.** 略.
4. $|z|\geqq 1$ のとき，$|nz^n|\geqq n$ より，$nz^n\to\infty$. $|z|<1$ のとき，$|z|=1/(1+h)$, $h>0$ とかけ二項定理より $|nz^n|=n/(1+h)^n<2n/(n(n-1)h^2)$ となって，$nz^n\to 0$ である．任意の $0<\delta<1$ に対し，$|z|\leqq 1-\delta$ では，$|nz^n|\leqq n(1-\delta)^n\to 0$ より一様収束である．しかし，$|z|<1$ では一様収束でない．否定して一様収束したとしよう．$1>\varepsilon>0$ を与える．n_0 がきまり $n\geqq n_0$ なら任意の $|z|<1$ をみたす z に対し $|nz^n|<\varepsilon$ となるわけである．$n\geqq n_0$ に n を一つ固定する．nz^n は z が1に近いと n に近く，絶対値が ε より小さくなれない． **5.** 微分して極大を求めることにより，すべての実数に対し $|x|/n(1+nx^2)\leqq 1/2n\sqrt{n}$ が成り立つ．$\sum(1/2n\sqrt{n})$ は収束するから，全実数区間 $(-\infty, +\infty)$ で一様収束する．
6. $u_1+u_2+\cdots$ の方を絶対収束とする．$U_n=u_1+\cdots+u_n$, $V_n=v_1+\cdots+v_n$, $w_n=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1$, $W_n=w_1+\cdots+w_n$ とおく．$V-V_n=\delta_n$ とおくと，仮定より $\delta_n\to 0$ で，すべての n に対し $|\delta_n|<K$ をみたす K がある．$R_n=u_1\delta_n+u_2\delta_{n-1}+\cdots+u_n\delta_1=u_1(V-V_n)+\cdots+u_n(V-V_1)=U_nV-W_n$ がわかる．任意に $\varepsilon>0$ を与える．絶対収束より，n_1 を $n>n_1$ ならば $|u_{n_1+1}|+\cdots+|u_n|<\varepsilon/(2K)$ をみたすようにとれる．$|u_1|+\cdots+|u_{n_1}|=L$ とおく．$\delta_n\to 0$ より，n_2 を $n>n_2$ なら $|\delta_n|<\varepsilon/(2L)$ をみたすようにとる．$n_0=n_1+n_2$ とおく．$n>n_0$ のとき $n-n_1>n_2$ で，

$$|R_n|\leqq|u_1\delta_n+\cdots+u_{n_1}\delta_{n-n_1+1}|+|u_{n_1+1}\delta_{n-n_1}+\cdots+u_n\delta_1|$$
$$\leqq(|u_1|+\cdots+|u_{n_1}|)\varepsilon/(2L)+(|u_{n_1+1}|+\cdots+|u_n|)\cdot K<L\varepsilon/(2L)+(\varepsilon/(2K))\cdot K=\varepsilon$$

となる．ゆえに，$R_n\to 0$ で，$W_n=U_nV-R_n\to UV$ となる．

問題 (p. 43) **1.** $1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}z^n$. **2.** $\dfrac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n$. 収束半径は2．
3. 1, $+\infty$, 0, $+\infty$, 1. **4.** $\sqrt{R}$, R^2. **5.** $z(z(zf'(z))')'=zf'(z)+3z^2f''(z)+z^3f'''(z)$. **6.** 正数列 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ に対し，$\overline{\lim}\,\alpha_n\beta_n\leqq\overline{\lim}\,\alpha_n\cdot\overline{\lim}\,\beta_n$ である．∵ k をとり，$n\geqq k$ なる n に対し上限をとり $\sup\alpha_n\beta_n\leqq\sup\alpha_n\cdot\sup\beta_n$ である．$k\to+\infty$ として終り．アダマールの公式とこの不等式から結果をうる． **7.** 略． **8.** $|1+z|<|z|$, すなわち，$\mathrm{Re}\,z<-1/2$.
9. $|z|<1$ のとき，$|1+z^{2n}|\geqq 1-|z|^{2n}\geqq 1-|z|$. ∴ $|z^n|/|1+z^{2n}|\leqq|z|^n/(1-|z|)$ より収束することがわかる．$|z|>1$ のとき，$z=1/z'$ として z' にかきなおせば，$|z|<1$ のときに帰着され収束がわかる．$|z|=1$ のとき，$|z|^n/|1+z^{2n}|\geqq 1/(1+|z|^{2n})=1/2$ で発散である．

問題 ((p. 47) **1.** $i(e-e^{-1})/2$, $(e^{-1}+e)/2$, $-i(e^{i-1}-e^{-i+1})/(e^{i-1}+e^{-i+1})$. **2.** $\cosh z=\cos iz$, $\sinh z=(\sin iz)/i$. $\cosh(z_1+z_2)=\cosh z_1 \cosh z_2+\sinh z_1 \sinh z_2$, $\sinh(z_1+z_2)=\sinh z_1 \cosh z_2+\cosh z_1 \sinh z_2$, あと略. **3.** $\cos x \cosh y-i \sin x \sinh y$, $\sin x \cosh y+i\cos x \sinh y$. **4.** 略. $\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$ に注意.

問題 (p. 50) **1.** 帰納法による. $\cos y$, $\sin y$ の整級数展開を第 n 項までうちきったものを $f_n(y)$, $g_n(y)$ とし, 剰余を $\varphi_n(y)=\cos y-f_n(y)$, $\psi_n(y)=\sin y-g_n(y)$ とおく. 剰余の最初の項は $(-1)^n y^{2n}/(2n)!$, $(-1)^n y^{2n+1}/(2n+1)!$ なので, 証明すべきことは, $y\neq 0$ のとき, $(-1)^n\varphi_n(y)>0$, $(-1)^n y\psi_n(y)>0$ である. 47頁で n が小さいときは証明できている. n のとき正しいとし $n+1$ のときを調べる. $\sin 0=0$, $\cos 0=1$ に注意し, 0 から y まで積分し, $\psi_{n+1}(y)=\int_0^y \varphi_{n+1}(y)dy$, $\varphi_{n+1}(y)=-\int_0^y \psi_n(y)dy$ をうる. n の偶奇, y の正負をわけて考えれば結論をうる. **2.** この本での π の定義は, $\cos y_0=0$, $0<y_0<\sqrt{3}$ という y_0 が $\pi/2$ である. $\cos 0=1$ で, 0 と y_0 の間では $\cos y$ は単調減少する(48頁). 前問より $\cos y>f_4(y)=1-(y^2/2!)+(y^4/4!)-(y^6/6!)$ で, $f_4(3/2)=359/5120>0$ である. $\therefore\ 3/2<y_0<\sqrt{3}$. **3.** $e^{\pi i/2}=i$ の共役をとり, $e^{-\pi i/2}=-i$. $(e^{\pi i/4})^2=e^{\pi i/2}=i$ で, i の平方根は $\pm(1+i)/\sqrt{2}$ である. $\cos\theta$ の単調性から $e^{\pi i/4}=(1+i)/\sqrt{2}$ がわかる. $e^{3\pi i/4}=e^{\pi i/2}\cdot e^{\pi i/4}=(-1+i)/\sqrt{2}$. 同様にして, $e^{\pi i/3}$ は-1の 3 乗根の一つで, $e^{\pi i/3}=(1+\sqrt{3}i)/2$ となり, 2 乗して $e^{2\pi i/3}=(-1+\sqrt{3}i)/2$. **4.** $\log 2+2n\pi i$, $(2n+1)\pi i$, $(\pi/2+2n\pi)i$, $-\log 2+\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)i$, $\frac{1}{2}\log 2+\left(\frac{5}{4}\pi+2n\pi\right)i$, $\frac{1}{2}\log 5+(\mathrm{Arctan}\,2+2n\pi)i$. ただし, n は任意の整数, 正の実数の対数は実数値の対数とする. **5.** 実部は $\exp(e^x\cos y)\cdot\cos(e^x\sin y)$, 虚部は $\exp(e^x\cos y)\cdot\sin(e^x\sin y)$. **6.** $e^{-2n\pi}(\cos\log 2+i\sin\log 2)$, $\exp(-\pi/2-2n\pi)$, $\exp(-2\pi-4n\pi)$. ただし, n は任意整数, $\log 2$ は実数値. **7.** 略. **8.** $\arctan w=(1/2i)\log\{(1+iw)/(1-iw)\}$. **9.** 3 点 a, b, c を頂点とする三角形を考える. 1 頂点 a における角を, $(b-a)/(c-a)$ かその逆数の $(c-a)/(b-a)$ のうち虚部が正のものをとり(それは一つだけ), その偏角で定義する. もちろん, 虚部が正なので偏角は 0 と π の間にとれるのでそうしておく. 考えをきめるために, $(b-a)/(c-a)$ の虚部が正としておく. 頂点 b における角を考えよう. $(c-b)/(a-b)$ と $(a-b)/(c-b)$ のうち, 前者の方が虚部正になる. $\because\ (c-b)/(a-b)=1-(c-a)/(b-a)$ となり虚部は $(b-a)/(c-a)$ の虚部と同符号である. 同様にして, 頂点 c での角は $\arg\{(a-c)/(b-c)\}$ となる. $\{(b-a)/(c-a)\}\{(c-b)/(a-b)\}\{(a-c)/(b-c)\}=-1$ となり, これから角の和が π になることがいえる. **10.** $a=re^{i\theta}$ とすると, a の n 乗根は $r^{1/n}\exp\left\{\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)i\right\}$, $k=0, 1, \cdots, n-1$ である. これは原点を中心, 半径 $r^{1/n}$ の円周上に等間隔に並んだ n 個の点である.

第 3 章

問題 (p. 56) **1.** 距離関数の条件 1, 2(53頁) は明らか. 負でない定数 α, β, γ に対し, $\alpha+\beta\geqq\gamma$ なら $(\alpha/(1+\alpha))+(\beta/(1+\beta))\geqq\gamma/(1+\gamma)$ が成立するから, 三角不等式 $\delta(x, y)+\delta(y, z)\geqq\delta(x, z)$ も成立. **2.** 距離 d, d_1 が条件をみたすとし, O を d による開集合

とする．任意の $y \in O$ に対し $B(y,\varepsilon) \subset O$ に $\varepsilon>0$ がとれる．($B(y,\varepsilon)$ は距離 d による球．距離 d_1 による球は B_1 とかくことにする．) 仮定より $d_1(x,y)<\delta$ なら $d(x,y)<\varepsilon$ をみたすように $\delta>0$ がとれる．$B_1(y,\delta) \subset B(y,\varepsilon) \subset O$ となり，O は O の任意の点 y の距離 d_1 による近傍となり，O は d_1 に関して開集合である．逆の d_1 に関する開集合が d に関するそれになることも同様．(問の条件は，同値になるための必要条件でもあるが，その証明は略)．問 1 の $\delta(x,y)$ を $d_1(x,y)$ とおく．任意の $\varepsilon>0$ に対し，δ を $\varepsilon \geqq 1$ なら $\delta=\varepsilon$, $\varepsilon<1$ なら $\delta=\varepsilon/(1-\varepsilon)$ にとる．任意の $\varepsilon'>0$ に対し，$\delta'=\varepsilon'/(1+\varepsilon')$ とおく．これで d と $d_1(=\delta(x,y))$ との同値がわかる． **3.** $|a-z_0| \leqq \delta$ をみたす a を中心にどんな円 $|z-a|<\varepsilon$ をとってもそれは $|z-z_0|<\delta$ と交わる．$|b-z_0|>\delta$ をみたす b を中心に十分小さい半径 ε の円 $|z-b|<\varepsilon$ をかくとそれは $|z-z_0|<\delta$ と交わらない． **4.** $\mathrm{Int}\, X=\phi$, $X^-=\partial X=\boldsymbol{C}$. **5.** $X'^{-'}=\mathrm{Int}\, X$. $\because$ $a \in X'^{-'} \Leftrightarrow a \notin X'^- \Leftrightarrow B(a,\varepsilon) \cap X'=\phi$ となる $\varepsilon>0$ が存在 $\Leftrightarrow B(a,\varepsilon) \subset X$ となる ε が存在 $\Leftrightarrow a \in \mathrm{Int}\, X$. $X^{-'-'-'-'}=X^{-'-'}$ を示すには，$M=\mathrm{Int}(X^-)$ とおき，$\mathrm{Int}(M^-)=M$ をいえばよい．M は開集合で $M^- \supset M$ より $\supset$ は明らか．背理法で $\subset$ を示す．$a \in \mathrm{Int}(M^-)$, $a \notin M$ として矛盾をだす．このとき $a \in \partial M$ である．$B(a,\varepsilon) \subset M^-$ となる $\varepsilon>0$ が存在し，$B(a,\varepsilon) \cap M' \neq \phi$ である．$b \in B(a,\varepsilon) \cap M'$ をとる．$b \notin \mathrm{Int}(X^-)$ より，$B(b,\varepsilon') \subset B(a,\varepsilon)$, $B(b,\varepsilon') \not\subset X^-$ をみたす $\varepsilon'>0$ がある．$c \in B(b,\varepsilon')$, $c \notin X^-$ という点 c がある．X^- の定義から，$B(c,\varepsilon'') \subset B(b,\varepsilon')$, $B(c,\varepsilon'') \cap X=\phi$ という ε'' が存在する．やはり X^- の定義から $B(c,\varepsilon'') \cap X^-=\phi$ となる．$B(c,\varepsilon'') \cap M=\phi$, $B(c,\varepsilon'') \cap M^-=\phi$ となり，$B(c,\varepsilon'') \subset B(a,\varepsilon) \subset M^-$ に矛盾する． **6.** X を離散集合とする．各 $a \in X$ に対し，$B(a,\varepsilon(a)) \cap X=\{a\}$ となる $\varepsilon(a)>0$ がある．$B(a,\varepsilon(a)/3)$ の中に座標が有理数である点 a' をとる．対応 $a \mapsto a'$ は，X を座標が有理数の点の集合の中へ 1 対 1 に写す． **7.** 集合 X の集積点の全体を X^d とかく．$a \notin X^d$ なら $\varepsilon>0$ があり $B(a,\varepsilon)$ の中に X の点が高々有限個しかないようにできる．任意の $x \in B(a,\varepsilon)$ は X の集積点ではない．ゆえに，$B(a,\varepsilon) \subset \sim X^d$ で，$\sim X^d$ は開集合である．

問題 (p. 62) **1.** $A \subset X$ を相対的開集合とする．各 $a \in A$ に対し，$\varepsilon_a>0$ を $\{x \in X; d(x,a)<\varepsilon_a\} \subset A$ となるようにとれる．$a \in A$ を動かして S における球 $B(a,\varepsilon_a)$ の合併を作り O とする．O は S の開集合で $O \cap X=A$ である．以下略． **2.** 略． **3.** X^- が連結でないとすると，開集合 O_1, O_2 で，$O_1 \cap X^- \neq \phi$, $O_2 \cap X^- \neq \phi$, $O_1 \cap O_2 \cap X^-=\phi$ をみたすものがある．$x \in O_1 \cap X^-$ をとると，O_1 は x の近傍で $x \in X^-$ より $O_1 \cap X \neq \phi$ である．同様にして $O_2 \cap X \neq \phi$ もいえ，$X \subset X^-$ より $O_1 \cap O_2 \cap X=\phi$ で，X が連結でなくなる． **4.** 連結． **5.** $E_0=\{(x,y);\ 0 \leqq x \leqq 1, y=0\}$, $E_n=\{(x,y);\ 0 \leqq x \leqq 1, y=1/n\}$, $(n=1,2,\cdots)$ とおく．これらが E の成分でみな閉集合になっている．E_n は E の相対的開集合だが，E_0 はそうでない．E_0 の点は連結近傍をもたず E は局所連結でない．
6. 略． **7.** 略．

問題 (p. 67) **1.** 略．(実数列の場合に帰着でき，そのとき有界なら上極限は存在し，36頁の上極限の特徴づけを用いると収束部分列がとれる)． **2.** 略． **3.** E を実数のコ

ンパクトな部分集合で，E は最大をもたないとする．各 $a \in E$ に対し，a より大きい E の元があるからそれを一つとり a' とかく．$O_a = \{x;\ |x-a| < |a'-a|/2\}$ とおくと，a を E のすべての元を動かして O_a の合併を考えるとこれは E をおおう．コンパクトより $E \subset O_{a_1} \cup \cdots \cup O_{a_n}$ となる有限個の $a_1, \cdots, a_n \in E$ がある．対応する $a_1', \cdots, a_n'$ の最大を α とすると，$\alpha \in E$, $\alpha \notin O_{a_1} \cup \cdots \cup O_{a_n}$ で矛盾． **4.** $\cap E_n = \phi$ とせよ．補集合をとると $\cup(\sim E_n)$ は全空間となり E_1 をおおう．コンパクトより $\sim E_n$ の有限個で E_1 がおおえるが，単調性からある n に対し，$\sim E_n \supset E_1$ となる．これは $E_n \subset E_1$ に矛盾する．反例．実数の空間で，$E_n = \{x;\ x \geqq n\}$ とせよ． **5.** S が距離空間になることは容易にわかる．$x^{(\nu)} = \{1, 1/2, \cdots, 1/\nu, 0, 0, \cdots\} \in S$, $(\nu = 1, 2, \cdots)$ は S のコーシー列であるが収束しない．(極限があるとすれば $\{1, 2, \cdots, 1/n, \cdots\}$ だが，これは S の点でない)．ゆえに完備でない．δ–近傍 $B(x, \delta)$ を考え，$0 < \varepsilon < \delta$ として，$B(x, \delta) \subset B(x^{(1)}, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x^{(n)}, \varepsilon)$ となったとせよ．$x, x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$ は実数列だが，すべて S の点だからある第 m 項は共通にすべて 0 になっている．第 m 項が $\varepsilon < y_m < \delta$ で他の項はすべて x のそれに等しいような y は $B(x, \delta)$ に入るが $B(x^{(1)}, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x^{(n)}, \varepsilon)$ に入れず，矛盾．

問題 (p. 70) **1.** $w = f(z) = (\tan(\pi|z|/2))z/|z|$, $f(0) = 0$. (もちろん，答はいろいろあり，これはその一つ.) **2.** $f\colon I \to A$ を位相写像 (I, A は実数の部分集合で I は開区間) とする．I は連結より A も連結で A は区間となる．A が閉区間ならコンパクトで I もそうなり矛盾．A が $a \leqq y < b$ または $b < y \leqq a$ とせよ．$f^{-1}(a)$ は I の点になり，$I - f^{-1}(a)$ は連結でなくなるが，$A - \{a\}$ は連結で矛盾．ゆえに A は開区間． **3.** 略． **4.** $d(x, y)$ の下限を α とすると，$x_n \in X, y_n \in Y$ を $d(x_n, y_n) \to \alpha$ にとれる．コンパクトより収束部分列 $x_{n_k} \to x$ がとれ，次に $\{y_{n_k}\}$ の収束部分列をとり極限を y とすると，$x \in X, y \in Y, d(x, y) = \alpha$ である． **5.** $|\sin x_1 - \sin x_2| = 2|\cos(x_1+x_2)/2 \cdot \sin(x_1-x_2)/2| \leqq |x_1 - x_2|$ より，$\sin x$ は一様連続．$x \sin x$ は一様連続でない．n を自然数とし $x_1 = 2n\pi + x > x_2 = 2n\pi$ としてみると $|x_1 \sin x_1 - x_2 \sin x_2| = (2n\pi + x) \cdot |\sin x| \geqq (2n\pi + x)(x - x^3/6)$ である．$\varepsilon > 0$ を小さく与えたときに，$\delta > 0$ を求め，$|x| < \delta$ なら n が何であってもこの式が ε より小さくなるようにすることは不可能である．同様に，$x \sin(x^2)$, $|x|^{1/2} \sin x$ も一様連続でない．(グラフをかいてみれば実感できるだろう)．

問題 (p. 78) **1.** 全平面から -1 以下の実数，1 以上の実数を除いたものを Ω とすると，Ω で正の実部をもつものとして $\sqrt{1+z}, \sqrt{1-z}$ の一価解析的な技が定まる． **2.** 全平面から 1 以下の実数を除いたものを Ω とする．Ω では $-\pi < \arg z < \pi$ として $\log z$ の一価な技が定まり値は負の実数にならない． **3.** 純虚数 w に対しては $|w^2 - 1| \geqq 1$ である．$O_1 = \{z \in \Omega;\ \mathrm{Re} f(z) > 0\}$, $O_2 = \{z \in \Omega;\ \mathrm{Re} f(z) < 0\}$ とおくと，ともに開集合で仮定より $\Omega = O_1 \cup O_2$ となる．Ω は連結より O_1 か O_2 の一方は ϕ である．

問題 (p. 84) **1.** $\bar{z} = (az+b)/(cz+d)$, $ad - bc \neq 0$ がすべての z に対し成立したとせよ．最初の等式を実部虚部にわけて計算して $a = b = c = d = 0$ がえられ矛盾．(次節以下で 1 次変換の性質がいろいろえられるが，それを用いれば別証ができる)． **2.** $T_1 T_2 z = (3z+2)/(4z+3)$, $T_2 T_1 z = (z+2)/(2z+5)$, $T_1^{-1} T_2 z = z - 2$. **3.** 求めるものは写像 $T\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$

で $T(0)=0$, 任意の z_1, z_2 に対し $|T(z_1)-T(z_2)|=|z_1-z_2|$ をみたすものである． $z_2=0$ として $|T(z)|=|z|$ である． $T(1)$ の絶対値は1だから $T(1)=e^{i\theta}$ とおく．距離保存より任意の z に対し頂点 $0, 1, z$ の三角形と頂点 $T(0)=0$, $T(1)=e^{i\theta}$, $T(z)$ の三角形は合同である．これから $T(z)=e^{i\theta}z$ または $T(z)=e^{i\theta}\bar{z}=\overline{e^{-i\theta}z}$ をうる． **4.** $Tz=(az+b)/(cz+d)$, $ad-bc\neq0$ とし， z が実数 x のとき $Tx=\overline{Tx}$ とする． これを分母を払ってかくと，$(a\bar{c}-\bar{a}c)x^2+(a\bar{d}-\bar{a}d+b\bar{c}-\bar{b}c)x+(b\bar{d}-\bar{b}d)=0$ となる．係数はすべて純虚数だから i でわり実数の方程式とみてよく，すべての実数に対し成り立つのだから，係数がすべて0となる． 場合をわけ， $d=0$ のとき；$bc\neq0$ だから最初の Tz の式の分子分母を c でわり， $c=1$ としてよい． $d=0, c=1$ なら係数$=0$ より $a-\bar{a}=0$, $b-\bar{b}=0$ で， a, b は実数になる． $d\neq0$ のとき; $d=1$ としてよい． $b-\bar{b}=0$ より b は実数となる． $a\bar{c}-\bar{a}c=0$, $a-\bar{a}+b\bar{c}-bc=0$ を $a=a'+ia''$, $c=c'+ic''$ と実部虚部にわけてかきなおすと， $a''c'-a'c''=0$, $a''-bc''=0$ となる． $0=(bc'')c'-a'c''=c''(bc'-a')$ であるが， $bc'-a'=0$ のときは $ad-bc=0$ となるので， $c''=0$ である． ∴ $a''=0$. ゆえに， a, c も実数になる．

問題 (p. 87) **1.** $(z, 0, i, -i)=(w, 1, -1, 0)$. これを解いて $w=-(z+i)/(3z-i)$. **2.** 24通りが6つの組にわかれ， $\lambda, 1/\lambda, 1-\lambda, 1/(1-\lambda), \lambda/(\lambda-1), (\lambda-1)/\lambda$ がでてくる． **3.** 円周上に順に z_1, z_2, z_3, z_4 があると， 1次変換 T で $Tz_2=1$, $Tz_3=0$, $Tz_4=\infty$ と写すと $Tz_1>1$ となる． ゆえに， $(z_1, z_2, z_3, z_4)>1$ で， 計算によりこれから $(z_1-z_2)(z_3-z_4)/((z_2-z_3)(z_1-z_4))>0$ をうる． 一方， $(z_1-z_3)(z_2-z_4)=(z_1-z_2)(z_3-z_4)+(z_2-z_3)(z_1-z_4)$ が成立する． ∴ $|z_1-z_3|\cdot|z_2-z_4|\leqq|z_1-z_2|\cdot|z_3-z_4|+|z_2-z_3|\cdot|z_1-z_4|$ となるが， 前の不等式より等号が成立．内接四辺形の対辺の長さの積の和は対角線の長さの積に等しい．
4. z_1 を1に， z_2 を -1 に， z_3 を k に， z_4 を $-k$ に写すとすると，$(1, -1, k, -k)=(z_1, z_2, z_3, z_4)$ ($=\lambda$ とおく） より， $k=(1+\lambda\pm2\sqrt{\lambda})/(1-\lambda)$. k はこの2つで， この2数は互に逆数になっている．

問題 (p. 89) **1.** 円 C の C_0 に関する鏡像を求める． 幾何学的意味から C_0 の中心を原点としてよい． C_0: $|z|=R$, C: $|z-a|=r$ とする．点 z の C_0 に関する鏡像 w は $w\bar{z}=R^2$ である．これを用いて C の式から z を消去すると，C が C_0 の中心（つまり原点）を通らないとき，$|w-aR^2/(|a|^2-r^2)|=R^2r/||a|^2-r^2|$ となり，これは円である． $|a|=r$ のときは $2\,\mathrm{Re}\,\bar{a}w-R=0$ となり直線である． (C, C_0 の一方または両方が直線のとき省略).
2. 円 $|z-2|=1$ に関する点 z の鏡像を w とすると，$(w-2)(\bar{z}-2)=1$. ゆえに， $\bar{z}=2+(1/(w-2))$. これを与えられた方程式に代入すればよい． 答． $|w-7/4|=1/4$, $|w-(7+i)/4|=\sqrt{2}/4$, $|w-(4/3)|=1/3$. **3.** 略． **4.** 0の対称点 ∞ は i の対称点 $(-1+i)/2$ に写ることから， $(z, -2, 0, i)=(w, 0, i, (-1+i)/2)$. これから w を求めよ． **5.** a が原点に写るとする $(0<|a|<R)$. 対称点 $R^2/\bar{a}$ が ∞ に写り， 求める1次変換は $w=c(z-a)/(R^2-\bar{a}z)$ の形になる． $|z|=R$ のとき， $R=|w|=|c|\,|(z-a)/(R^2-\bar{a}z)|=|c|\,|R(z-a)/\bar{z}(R^2-\bar{a}z)|=|c|/R$ となり， $c=R^2e^{i\theta}(0\leqq\theta<2\pi)$ となる．ゆえに， $w=R^2e^{i\theta}(z-a)/(R^2-\bar{a}z)$, $(|a|<R, 0\leqq\theta<2\pi)$. ($a=0$ のときは別に確かめてこれでよいことがわかる)． **6.** 1次変換 T により， 同心円 C_i; $|z-a|=r_i$ が同心円 $T(C_i)$: $|w-b|=R_i$ $(i=1, 2)$ に写ったとす

る．平行移動では半径が変わらないから，$a=b=0$ としてよい．0 と ∞ は C_i に関し対称だから $T(0)$ と $T(\infty)$ は $T(C_i)$ に関し対称である．もちろん $R_1 \neq R_2$ だから，$T(0)$, $T(\infty)$ が両方とも有限の点ではありえず，一方が中心 0 で他方が ∞ である．1 次変換 $w \to 1/w$ により $T(C_i)$ は半径 $1/R_i$ の円に写り，半径の比は変わらない．ゆえに，$T(0)=0$, $T(\infty)=\infty$ としてよく，$Tz=cz$ (c は定数) となる．∴ 半径の比は不変． **7.** 単位円を C_1, もう一方を C_2 とし，考えをきめるために，1 次変換 T による像を $T(C_1)$: $|w|=1$, $T(C_2)$: $|w|=R$ とする．$\alpha=T^{-1}(0)$ と $\beta=T^{-1}(\infty)$ は C_1, C_2 に関し対称となり，$\alpha\bar{\beta}=1, (\alpha-1/4)(\bar{\beta}-1/4)=1/16$ をみたす．これから，$\alpha=2\pm\sqrt{3}$, $\beta=2\mp\sqrt{3}$ (複号同順)をうる．w 平面に 1 次変換 $1/w$ をすると一方は他方に写るからどちらでもよく，$\alpha=2-\sqrt{3}$, $\beta=2+\sqrt{3}$ としよう．これで $Tz=c(z-\alpha)/(z-\beta)$ がわかる．c は定数だが，w 平面を適当に回転して $c>0$ にしてよい．$T(0)=c\alpha/\beta$ と $T(\infty)=c$ は $T(C_1)$ に関し対称で，これから $c=2+\sqrt{3}\,(=\beta)$ がわかる．∴ $Tz=\beta(z-\alpha)/(z-\beta)=(z-\alpha)/(\alpha z-1)$. $R=|T(0)|=\alpha$. **8.** 前問と同様．一つの答は，$Tz=(z-\alpha)/(\alpha z-1)$ で $|z|=1$ は $|w|=1$ に，$x=2$ は $|w|=2+\sqrt{3}$ に写る．(ただし $\alpha=2-\sqrt{3}$).

問題 (p. 91) **1.** 目的は，円上にないすべての z に対し $\mathrm{Im}(z, z_1, z_3, z_4)$ と $\mathrm{Im}(z, z_2, z_3, z_4)$ が同符号 $\Leftrightarrow (z_1, z_2, z_3, z_4)>0$ を示すことである．条件がすべて非調和比で表せるから，1 次変換をして $z_3=0$, $z_4=\infty$ としてよい．$(a, b, 0, \infty)=a/b$ より，すべての z に対し $\mathrm{Im}(z/z_1)$ と $\mathrm{Im}(z/z_2)$ が同符号 $\Leftrightarrow z_1/z_2>0$ をいえばよい．今 $z_1, z_2, 0, \infty$ は同一円周上にあるから z_1/z_2 は実数であり，$z/z_2=(z/z_1)\cdot(z_1/z_2)$ より明らかである． **2.** 略． **3.** $|z-a|=R$ 上に 3 点を $\mathrm{Im}(\infty, z_1, z_2, z_3)>0$ にとるとき，$\mathrm{Im}(z, z_1, z_2, z_3)<0 \Leftrightarrow |z-a|<R$ を示したい．3 点のとり方によらないことはわかっているから，$z_1=a+R$, $z_2=a+Ri$, $z_3=a-R$ にとる．(この 3 点は $|z-a|=R$ をみたし，$\mathrm{Im}(\infty, z_1, z_2, z_3)>0$ である)．あとは計算で，$z-a=x+iy$ とおくと，$\mathrm{Im}(z, z_1, z_2, z_3)<0 \Leftrightarrow x^2+y^2<R^2$ が容易に示せる． **4.** 円 C, C' の交点を z_1, z_2 とし，別に C 上に点 z_0, C' 上に点 z_0' をとる．C の向きを z_1, z_0, z_2 で C' の向きを z_1, z_0', z_2 できめたときに交点 z_1 での C から C' への交角は $\arg(z_0', z_0, z_1, z_2)$ である．(1 次変換で z_2 を ∞ に写し 1 次変換の等角性からその像で考えよ)．同様に，同じ向きで，交点 z_2 での C から C' への交角は $\arg(z_0', z_0, z_2, z_1)$ である．この 2 つの非調和比は互いに逆数なので，偏角は符号だけがかわる．

問題 (p. 95) **1.** 0, 1, 楕円型．0, 1, 斜航型．-2, 放物型．0, 1, 双曲型． **2.** 不動点は $z=Sz$, すなわち $cz^2-(a-d)z-b=0$ の根である．$c=0$ のときは省略し $c\neq 0$ のときだけ解答する．判別式 $D=(a-d)^2+4bc=(a+d)^2-4$ となり，放物型 $\Leftrightarrow (a+d)^2=4$ をうる．以後 $D\neq 0$ とする．不動点 α, β により $w=Sz$ は $(w-\alpha)/(w-\beta)=k(z-\alpha)/(z-\beta)$ とかける．$z=\infty$ とすると $w=a/c$ で，これを代入して $k=(a-c\alpha)/(a-c\beta)=(a+d+\sqrt{D})/(a+d-\sqrt{D})$ をうる．$\lambda=(a+d+\sqrt{D})/2$ とおくと，$1/\lambda=(a+d-\sqrt{D})/2$ となり，$k=\lambda^2$, $a+d=\lambda+(1/\lambda)$, $(a+d)^2-4=D^2=(\lambda-(1/\lambda))^2$ となる．$D\neq 0$ より $\lambda\neq\pm 1$ である．

双曲型 $\Leftrightarrow k>0 \Leftrightarrow \lambda$ は実数，$\lambda\neq 0 \Leftrightarrow \lambda+(1/\lambda)$ は実数，$(\lambda-(1/\lambda))^2>0$,

楕円型 $\Leftrightarrow |k|=1 \Leftrightarrow |\lambda|=1 \Leftrightarrow \bar{\lambda}=1/\lambda \Leftrightarrow \lambda+(1/\lambda)$ は実数，$(\lambda-(1/\lambda))^2<0$.

3. 放物型でないとし，２つの不動点を $0, \infty$ に写す１次変換を T とし，TST^{-1} を考える．$0, \infty$を動かさないから，$TST^{-1}z=\lambda z$ という形になる．$\lambda^n z=(TST^{-1})^n z=TS^nT^{-1}z=z$ より，$\lambda^n=1$, $\therefore\ |\lambda|=1$ となり S は楕円型である．放物型とすると，不動点を ∞ に写す１次変換 T をとり同様にすると矛盾をうる． **4.** 前問と同様にして $TS^nT^{-1}z=\lambda^n z$ とする．仮定より $|\lambda|\neq 1$. $|\lambda|>1, z\neq 0$ なら $\lambda^n z\to\infty$, $|\lambda|<1, z\neq 0$ なら $\lambda^n z\to 0$ である．$S^n=T^{-1}(TS^nT^{-1})T$ として S^n にいいなおせばよい． **5.** p. 21 問１より，不動点は a と $-1/\bar{a}$ であり，前問より楕円型である．$(w-a)/(\bar{a}w+1)=e^{i\theta}(z-a)/(\bar{a}z+1)$.
6. $Tz=(z-a)/(az-1)$, $a=-7+4\sqrt{3}$ で，$|z|=1, |z-1|=4$ は同心円 $|w|=1, |w|=R$ に写る．w 平面の原点を通る直線を T^{-1} でひきもどして，$|z-(-7+i\cdot 4\sqrt{3}\,t)|=4\sqrt{3(1+t^2)}$ をうる．t は実数． **7.** ６，５，５，４，３．

問題 (p. 104) **1.** $\alpha=(1+\sqrt{3}\,i)/2$, $z_1=-(z-\alpha)/(z-\bar{\alpha})$, $z_2=z_1{}^{3/2}$, $w=(z_2-1)/(z_2+1)$.
2. $z_1=i/(z-1)$, $z_2=e^{z_1+i}$, $w=z_2{}^{2\pi}$. まとめると，$w=\exp(2\pi iz/(z-1))$. **3.** $z_1=(iz+1)/(z+i)$, $z^2=z_1-\sqrt{z_1{}^2-1}$, (これで，∞ が $\alpha=(1-\sqrt{2})i$ に写っているので) $z_3=(z_2-\alpha)/(1-\bar{\alpha}z_2)$, $w=1/z_3$. **4.** $z_1=2pz-p^2$, $z_2=z_1{}^{1/2}$, $z_3=z_2-pi$, (これで $-p/2$ が $\alpha=(\sqrt{2}-1)pi$ に写っているので) $w=-(z_3-\alpha)/(z_3-\bar{\alpha})$. **5.** $z_1=z^2$, $z_2=z_1-a^2$, $z_3=(z_2-1)/(z_2+1)$, $w=(z_3-\alpha)/(1-\alpha z_3)$. 但し $\alpha=(a^2-1)/(a^2+1)$. **6.** $z_1=(z^2-a^2)/\rho^2$, $\alpha=-a^2/\rho^2$ として $z_2=(z_1-\alpha)/(1-\alpha z_1)$, $w=\sqrt{z_2}$. (注意．$z\to z_1$ の写像は１対１ではない．しかし，例えば上半平面と下半平面にでもわけて像領域を追跡し，$z_2\to w$ の所の平方根の枝を２つの像領域で異なるようにとると，z から w への写像は１対１上への等角写像になる)． **7.** $a>b$ とする．$z_1=z/\sqrt{a^2-b^2}$, $z_2=z_1-\sqrt{z_1{}^2-1}$, $\rho=\sqrt{(a+b)/(a-b)}$ として，$w=z_2/\rho$ **8.** 略．

問題 (p. 107) **1.** $|z|<1, |z|>1$ がそれぞれ全平面から線分 $[-1,1]$ を除いた所へ写る．２枚の全平面を線分 $[-1,1]$ を切り口にして交差させてつなぐ，分岐点は± 1. **2.** $\{z=x+yi;\ x^2-y^2>1,\ x<0\}$, $\{x^2-y^2>1,\ x>0\}$ は全平面から負の実軸を除いた所へ写る．$\{x^2-y^2<1,\ y<0\}$, $\{x^2-y^2<1,\ y>0\}$ は，全平面から１以下の実数を除いた所の上へ写る．この４枚の平面のつなぎ方は略． **3.** 略．

第４章

問題 (p. 115～p. 116) **1.** $(1+i)/2$. **2.** $\pi r^2 i$. **3.** 部分分数に展開せよ．答．0. **4.** 8.
5. γ の助変数表示を $z=z(t)$, $a\leqq t\leqq b$ とすると，$f(\gamma)$ は $w(t)=f(z(t))$ とかける．$\overline{f(z(t))}\cdot f'(z(t))z'(t)dt=\overline{w(t)}\,w'(t)dt$ となり，$w(t)=u(t)+iv(t)$ とかけば，実部は $(u(t)u'(t)+v(t)v'(t))dt$ となる．この積分は $(u(t)^2+v(t)^2)/2$ で，閉曲線より $u(a)=u(b)$, $v(a)=v(b)$ で，結果をうる． **6.** $|w-1|<1$ では $\log w$ の一価な枝が定まる．ゆえに，$f'(z)/f(z)$ は Ω において原始関数 $\log f(z)$ をもつ． **7.** $P(z)=c_0+c_1(z-a)+\cdots+c_n(z-a)^n$ とし，C を $z=a+Re^{it}$, $\overline{dz}=-iRe^{-it}dt$ として計算せよ． **8.** 題意が少し不明確であるが，Ω 内の任意の閉曲線 γ に対し積分が 0 という意味であろう．まず，$\log z$ の一価な枝が定義されていなければならぬ．全平面から，0 から ∞ にいたる半直線を抜いた残りなどなら

よい．$(z\log z-z)'=\log z$ よりそこでは問題の式は成立する．

問題 (p. 125～p. 126)　**1.** 略．　**2.** 略．　**3.** 略．

問題 (p. 127)　**1.** $2\pi i$　**2.** 0.　**3.** $2\pi\rho/|\rho^2-|a|^2|$.

問題 (p. 131)　**1.** n, m は整数である (そうでないと被積分関数の一価な技がとれない). (i) $n\leqq 0$ なら 0, $n\geqq 1$ なら $2\pi i/(n-1)!$　(ii) $n=-1, m\neq -1$ のとき $2\pi i$, $n\neq -1, m=-1$ のとき $-2\pi i$, その他のとき 0.　(iii) $2\pi\rho(\rho^2+|a|^2)/|\rho^2-|a|^2|^3$.　**2.** $|z|\geqq R$ で $|f(z)|<|z|^n$ とする．任意に a をとり，円周 $|z-a|=r$ は $|z|\geqq R$ の中にあるように r を大きくとる．その円周上では $|f(z)|<|z|^n\leqq(|a|+r)^n$ に注意してコーシーの評価式の証明と同様にすれば $|f^{(k)}(a)|\leqq(|a|+r)^n k!r^{-k}$ をうる．$k>n$ なら $r\to+\infty$ として $f^{(k)}(a)=0$ となり，$n+1$ 回導関数が恒等的に 0 であることがいえる．**3.** $|\zeta|=R, |z|\leqq\rho$ なら $|\zeta-z|\geqq R-\rho$ である．$f^{(n)}(z)$ を $|\zeta|=R$ 上の積分で表示し評価する．答．$n!MR/(R-\rho)^{n+1}$. **4.** $0<r<1$ とし，円周 $|\zeta|=r$ 上で考えると，$|f(\zeta)|\leqq 1/(1-r)$ となり，コーシーの評価式より $|f^{(n)}(0)|\leqq n!/((1-r)r^n)$ をうる．$(1-r)r^n$ は $r=n/(n+1)$ で最大値 $n^n/(n+1)^{n+1}$ をとる．ゆえに，$|f^{(n)}(0)|\leqq n!(n+1)^{n+1}n^{-n}$.　**5.** z を中心に小さな半径 r の円をとれば，この円周上で $|f(z)|\leqq M$ をみたすように M がとれる．(このような，r, M はつねに存在する)．コーシーの評価式より $|f^{(n)}(z)|\leqq Mn!r^{-n}$ となり，$n!n^n\leqq Mn!r^{-n}$, $\therefore\ (nr)^n\leqq M$ となる．すべての n に対しこの不等式が成立することはありえない．**6.** 略．

問題 (p. 139)　**1.** 積は略．$\alpha>h-k$ なら $\alpha=(h+h_1)-(k-k_1)$ に $h_1, k_1>0$ がとれる．$|z-a|^\alpha|f(z)/g(z)|=|z-a|^{h+h_1}|f(z)|/(|z-a|^{k-k_1}|g(z)|)\to 0(z\to a$ のとき)．$\alpha<h-k$ なら，$\alpha=(h-h_1)-(k+k_1)$ に $h_1, k_1>0$ がとれ，同様にして $\to\infty$ がいえる．$\max(h, k)<\alpha$ ならば，$|z-a|^\alpha|f(z)+g(z)|\to 0$ ($z\to a$ のとき) となり，$f+g$ の代数的位数は $\max(h, k)$ 以下である．　**2.** ∞ での特異部は z の多項式になり，それを引いてしまうとリュービルの定理が適用でき定数になってしまう．**3.** 実軸と虚軸にそって $z\to\infty$ としてみよ．一方は $\to\infty$ となるが一方は有界であり，これは ∞ が除去可能でも極でもないことを示す．**4.** 拡張された平面はコンパクトだから，孤立点集合である極の全体は有限個である．各極における特異部を全部引いてしまうと，残りにリュービルの定理が適用でき定数になってしまう．　**5.** $f(z)$ は $0<|z-a|<r$ で正則，$\mathrm{Re}\,f(z)<M$ とせよ．半平面 $\mathrm{Re}\,w<M$ を単位円に写す 1 次変換を T とすると，合成関数 $T\circ f=\varphi$ には定理 7 が適用でき，a は φ の除去可能特異点となり，$f=T^{-1}\circ\varphi$ もそうなる．**6.** $f=u+iv$ とすると $|e^f|=e^u$ で，$z=a$ が e^f の極ならば，$z\to a$ のとき $u\to+\infty$ となり，$\mathrm{Re}\,f$ は下から有界となって前問から a は f の除去可能特異点となる．(定理 9 の使い方が訳者にはわからぬ．次節の定理11を用いると，a が f の極ならば $1/f$ の零点で 0 の近傍のすべての値をとり，それからならば定理 9 を用いて a が e^f の真性特異点になることがいえる)．

問題 (p. 143)　**1.** $w'=2z+1$ の零点 $-1/2$ を含めば 1 対 1 ではありえない．$z_1\neq z_2$ で $z_1^2+z_1=z_2^2+z_2$ とすると，$z_1+z_2=-1$ である．$|z|<1/2$ はこのような 2 点は含めず，これが答．　**2.** $|z|<\pi$.　**3.** $\zeta(z)=\sqrt{2}\,i\cdot\sin(z/2)$.　**4.** $f(z)=f(0)+zf_1(z)$ とおく．$f_1(z)$

は 0 の近傍で解析的で $f_1(0)=f'(0)\neq 0$ だから，n 乗根 $f_1(z)^{1/n}$ の1価な枝がとれる．$g(z)=zf_1(z^n)^{1/n}$.

問題 (p. 145～p. 146) **1.** $M=R=1$ として(36)より，$|f(z)-w_0|/|z-z_0|\leqq|1-\bar{w}_0f(z)|/|1-\bar{z}_0z|$ をうる．$z\to z_0$ として，$|f'(z_0)|\leqq(1-|f(z_0)|^2)/(1-|z_0|^2)$. **2.** $\zeta=Sz=(z-z_0)/(z-\bar{z}_0)$, $Tw=(w-f(z_0))/(w-\overline{f(z_0)})$ とし，合成写像 TfS^{-1} を考えるとシュヴァルツの補題が使えて，$|TfS^{-1}(\zeta)|\leqq|\zeta|$ となり，$|Tf(z)|\leqq|Sz|$ である．これが第一式で，それより前問と同様にして第二式をうる． **3.** $|z|<1$ で $f(z)$ は解析的で $|f(z)|\leqq 1$ とし，1点 z_0, $|z_0|<1$ で $|f'(z_0)|/(1-|f(z_0)|^2)=1/(1-|z_0|^2)$ が成立とする． $\zeta=Sz=(z-z_0)/(1-\bar{z}_0z)$, $\omega=Tw=(w-f(z_0))/(1-\overline{f(z_0)}w)$ とおき，合成関数 $\omega=\varphi(\zeta)=TfS^{-1}(\zeta)$ を考えると，φ は $|\zeta|<1$ を $|\omega|\leqq 1$ に写し，$\varphi(0)=0$ である．合成関数の微分を計算すると，条件の等式より $|\varphi'(0)|=1$ をうる． シュヴァルツの補題より $\varphi(\zeta)=c\zeta, |c|=1$ となり，$f=T^{-1}\varphi S$ は1次変換になる．あとは略． **4.** $|f(z)-f(z_0)|/|f(z)-\overline{f(z_0)}|\leqq|z-z_0|/|1-\bar{z}_0z|$. $|f'(z)|\leqq 2\mathrm{Im}f(z)/(1-|z|^2)$. **5.** D, D' を円板または上半平面とし，f を D から D' の上への1対1等角写像とする． $w_0=f(z_0)$ とし，S, T を D, D' を単位円に写す1次変換で $Sz_0=0, Tw_0=0$ とし， $\varphi=TfS^{-1}$ とおく． φ および φ^{-1} にはシュヴァルツの補題が使える．$|\varphi(\zeta)|\leqq|\zeta|$, $|\varphi^{-1}(\omega)|\leqq|\omega|$ となり，後者は $|\zeta|\leqq|\varphi(\zeta)|$ とかけ，前者で等号が成立するのだから $\varphi(\zeta)=c\zeta$, $|c|=1$ となる． ゆえに， $f=T^{-1}\varphi S$ は1次変換になる． **6.** 略(問1を用いる). **7.** 略. **8.** $|dz|/(2\,\mathrm{Im}\,z)$ の積分.

問題 (p. 159) **1.** 十分性．定理4 (p. 120) の証明と同様．fdz を $pdx+qdy$ とかきかえるだけである．必要性．閉長方形 R の各点 z に $pdx+qdy$ が完全であるような近傍をとり，その近傍内に z を中心とし辺が座標軸に平行な閉正方形 $Q(z)$ をとる．R はコンパクトだから，このような $Q(z)$の内部の有限個でおおうことができ，それを $Q(z_1)$, $\cdots$, $Q(z_n)$ とする．各 $Q(z_i)$ の辺を R の周に交わるまで延長し，R を閉長方形 R_ν の和に分割する．∂R 上の積分は ∂R_ν 上の積分の和で，各 ∂R_ν は $pdx+qdy$ が完全であるような近傍に含まれるから積分は0である． **2.** D を単連結領域で，$z_1, \cdots, z_m\in D$ とし，$D'=D-\{z_1, \cdots, z_m\}$ とする．D' の補集合は D の補集合と $z_1, \cdots, z_m$ で連結成分は $m+1$ 個である．z_i 中心の小円周を γ_i とする (γ_i とその内部は D に含まれ， γ_i は互いに交わらぬようにとる．$i=1, \cdots, m$). これがホモロジーの基底であることをいう．D' 内の任意の閉曲線 γ に対し， $c_i=n(\gamma, z_i)$ とおくと， $\gamma\sim c_1\gamma_1+\cdots+c_m\gamma_m(\mathrm{mod} D')$ である．これは，$a\notin D$ なら $n(\gamma, a)=0$, $n(\gamma_i, a)=0$ であるし，$i\neq j$ なら $n(\gamma_j, z_i)=0$, $n(\gamma_i, z_i)=1$ よりいえる． $c_1\gamma_1+\cdots+c_m\gamma_m\sim 0(\mathrm{mod}\, D')$ とすると， z_i のまわりの回転数をみれば $c_i=0$ でなければならぬ． **3.** 略．(p. 123 の定義参照). **4.** p. 152 参照．$1/z$ の原始関数として $\log z$ の1価な枝がきまる．$z^\alpha=\exp(\alpha\log z)$, $z^z=\exp(z\log z)$. **5.** $\varDelta$ を領域 Ω の補集合の連結成分で $\pm 1\in\varDelta$ とする． $\infty\in\varDelta$ なら $\varDelta$ の補集合 Ω' は単連結領域，$\infty\notin\varDelta$ なら $\varDelta\cup\{\infty\}$ の補集合 Ω' は2重連結領域である．いずれにしても $\Omega'\supset\Omega$ で， Ω' で議論すればよい． 単連結のときは p. 152 系2，系1から答をうる．Ω' が2重連結のときを考える．問2と同様にして $\{|z|\geqq R\}\subset\Omega'$ に R をとると，円周 γ_0: $|z|=$

R が Ω' のホモロジー基底であることがわかる．$-2z/(1-z^2)=(1/(z+1))+(1/(z-1))$ の γ_0 上の積分は $4\pi i$ である．点 $z_0\in\Omega'$ を固定し，$z\in\Omega'$ までこの関数を z_0 から Ω' 内の曲線にそって積分すると，$4\pi i$ の整数倍の差を無視すれば積分の値は途中の曲線のとり方によらずきまる．つまり，Ω' では $\log(1-z^2)$ が $4\pi i$ の整数倍を除ききまり，$\sqrt{1-z^2}=\exp\left(\frac{1}{2}\log(1-z^2)\right)$ を考えると，$4\pi i$ の整数倍の差は消えて，この枝は Ω' で1価に定まることがわかる．$z=1/t$ と変換して，$\int_{\gamma_0}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\int_{|t|=1/R}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ となる．この積分の値は R によらず一定で $R\to+\infty$ としてよい．$t=0$ の近傍で $1/\sqrt{t^2-1}=\pm i+t\varphi(t)$, $\varphi(t)$ は $t=0$ で解析的とかける（±は平方根が2つあるうちどちらをとるかによりきまる）．これから，$R\to+\infty$ として，積分の値が $\mp 2\pi$ になることがわかる．したがって，Ω' 内の閉曲線上の求める積分は 2π の整数倍である．

問題 (p. 166)　**1.** $|z|=1$ のとき，$|z^7-2z^5-z+1|\leqq|z^7|+2|z^5|+|z|+1=5<6=6|z^3|$. $f=6z^3$, $g=z^7-2z^5+6z^3-z+1$ としてルーシェの定理が使える．答．3個．**2.** $|z|=2$ のとき $|-6z+3|<|z^4|$ より，$|z|<2$ 内に4個．$|z|=1$ のとき $|z^4+3|<|-6z|$ より $|z|<1$ 内に1個．また，この不等式により $|z|=1$ 上には根がないことがわかる．$\therefore$ $1<|z|<2$ 内に3個．**3.** 虚軸上を iR から $-iR$ までいき，次に半円周で iR にもどる閉曲線を γ, $f(\gamma)=\Gamma$ として，$n(\Gamma,0)$ を求める．iR から $-iR$ までの線分を $z=-it(-R\leqq t\leqq R)$ とし，その像を $w(t)=u(t)+iv(t)$ とすると，$u(t)=t^4-3t^2+3$, $v(t)=8t^3-8t$ である．$u(t)$ は常に $\geqq 3/4$ であり，$u\geqq 3/4$ の半平面内にあり原点のまわりをまわることはない．半円周を $z=Re^{it}(-\pi/2\leqq t\leqq\pi/2)$ とする．R を大きくすると，$f(-iR)$, $f(iR)$ は相対的に実軸に近く（偏角が0に近い），z^4 に比べ $8z^3+3z^2+8z+3$ は非常に微小で，像曲線は z^4 による像曲線を少し変形したものにすぎぬ．z^4 によるこの半円周の像は，原点のまわりを2回まわる．答．右半平面に2個根がある．

問題 (p. 173〜p. 174)　**1.** a が h 位の極なら $\frac{1}{(h-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{h-1}}{dz^{h-1}}\{(z-a)^h f(z)\}$ が留数．これは，p. 162 の $f(z)$ の展開式から容易にわかる．この方法は (b), (f) などには有効．かっこ内が留数．(a) $z=-2$, (1), $z=-3$, (-1). (b) $z=1$, $(-1/4)$, $z=-1$, $(1/4)$. (c) $z=2n\pi$, (1), $z=(2n+1)\pi$, (-1). (d) $z=n\pi$, (1). (e) $z=n\pi$, (0). (f) $z=0$, $(n(n+1)\cdots(n+m-2)/(m-1)!)$, $z=1$, $(-m(m+1)\cdots(m+n-2)/(n-1)!)$. **2.** 略．**3.** (a) a は実数としてよいだろう．$\pm\pi/(2\sqrt{a^2+a})$, $a>0$ のとき $+$，$a<-1$ のとき $-$. (b) $\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})/2$. (c) $5\pi/12$. (d) $\pi/16|a|^3$. (e) $\pi e^{-|a|}/2|a|$. (f) $\pi e^{-|a|}/2$. (g) $\pi/\sqrt{3}$. (h) 図4-13の積分路を用いる．答．0. (i) 部分積分をする．$x\to+\infty$, $x\to+0$ のときに $x^{-\alpha}\log(1+x^2)\to 0$ なので，$x^{1-\alpha}/(1+x^2)$ の積分となり，これは例4の型である．$\pi/(\alpha\sin(\pi\alpha/2))$. **4.** $\bar{z}=\rho^2/z$, $|dz|=\rho dz/iz$ を用いる．$2\pi\rho/|\rho^2-|a|^2|$. **5.** $z=re^{i\theta}$ とおくと $dxdy=rdrd\theta$ で，θ の積分を先に考えると $\bar{z}=r^2/z$, $d\theta=dz/iz$ となり，問題の2重積分は $(0<|\zeta|<1$ として) $\frac{1}{i}\int_0^1\left(\int_{|z|=r}\frac{zf(z)}{(z-r^2\zeta)^2}dz\right)rdr=2\pi\int_0^1(f(r^2\zeta)+r^2\zeta f'(r^2\zeta))rdr=\frac{\pi}{\zeta}\int_0^1\frac{d}{dr}(r^2\zeta f(r^2\zeta))dr=\pi f(\zeta)$ をうる．

問題 (p. 179)　**1.** u が有界とすると(61)式の左辺は有界で $\alpha=0$ をうる．α は $*du$ の

周期だから，u は $0<|z|<\rho$ で1価な共役調和関数 v をもつ．$f=u+iv$ はそこで正則だが，実部が有界だから0は除去可能特異点となり (p. 139 問5)，したがって $u=\mathrm{Re}f$ もそうなる． **2.** 定数 c を $\log M(r_1)+c\log r_1=\log M(r_2)+c\log r_2$ により定める．$\log|f(z)|+c\log|z|$ は調和関数であり最大値の原理から，$\log M(r)+c\log r\leqq\log M(r_2)+c\log r_2$ をうる．これを計算すると問題の不等式となる．等号成立は $f(z)=az^n$ のとき (a は定数，n は整数).

問題 (p. 184〜p. 185) **1.** 証明の方針：ポアソン積分表示を用いて，調和関数列がコンパクト一様収束すれば極限関数も調和になることがいえる．$y/\{(x-\xi)^2+y^2\}=\mathrm{Im}\{1/(\xi-z)\}$ である．$u_n(z)=\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-n}^{n}\frac{U(\xi)}{\xi-z}d\xi\right\}$, $v_n(z)=\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-n}^{n}\frac{|U(\xi)|}{\xi-z}d\xi\right\}$ とおくと，これは上半平面で調和である (p. 129 補題3)．上半平面で u_n が P_U にコンパクト一様収束を示す．(直接にもいえると思うが，$v_n(z)$ に p. 263 定理7を用いそのコンパクト一様収束をいって，u_n は v_n の収縮になっていることをみる方が早い)．$U(\xi)$ が x_0 で連続とする．$x_0=0$ としてよいだろう．任意の $\varepsilon>0$ に対し $|\xi|<\delta$ なら $|U(\xi)-U(0)|<\varepsilon/2$ となるように δ をとる．$|x|<\delta/2$ にしておく．$|\xi|\geqq\delta$ なら $y^2+(x-\xi)^2\geqq\xi^2/4$ である．$|P_U(z)-U(x_0)|=\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}(U(\xi)-U(0))\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi\right|\leqq\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\delta}^{\delta}|\cdots|d\xi+\int_{|\xi|\geqq\delta}|\cdots|d\xi\right\}$ となり，$-\delta$ から δ までの積分は $\varepsilon/2$ でおさえられる．第2項は $|U(\xi)-U(0)|/\xi^2$ の積分×$4y/\pi$ でおさえられ，積分は有界だから y を小さくすれば $\varepsilon/2$ でおさえられる． **2.** $v=\mathrm{Im}(iz)^{1/2}=((y+|z|)/2)^{1/2}$, $\Delta=\{z;\ |z|<R,\ \mathrm{Im}\,z>0\}$, $\varepsilon>0$ とおく．R を大きくすると Δ の境界上では $u-P_u-\varepsilon v$, $P_u-u-\varepsilon v$ は $\leqq0$ である．(u は有界で P_u も上平面で有界になることに注意)．最大値の原理から Δ 全体でも同じ不等式が成立し，$\varepsilon\to0$ として $u=P_u$ をうる． **3.** $U(\xi)=1+u(\xi)$ とおく．任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\delta>0$ を，$0<\xi<\delta$ なら $|U(\xi)|<\varepsilon/4$, $-\delta<\xi<0$ なら $|u(\xi)|<\varepsilon/4$ にとる．$|x|<\delta/2$ とし y を小さくすれば問1と同様にして $|\xi|\geqq\delta$ での積分は $\varepsilon/4$ より小さくできる．また，0から δ までの積分，U を u にかきなおしたものの $-\delta$ から0までの積分も $\varepsilon/4$ より小さくなる．結局，U を1にしたものの $-\delta$ から0までの積分から $\arg z/\pi$ を引いたものが $z\to0$ で $\to0$ をいえばよい．これは arctan の計算になる． **4.** 略． **5.** 平均値の公式から $\log|1+z|$ は $|z|<1$ で調和関数だから，$0<r<1$ に対し θ に関する0から 2π までの $\log|1+re^{i\theta}|$ の積分は0になる．$r=1, \theta=\pi$ の近傍で，$0<\alpha<1$, $K>0$ をとり $|(\theta-\pi)^\alpha\log|1+re^{i\theta}||\leqq K$ とできる．これから，任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\delta>0$ をとり，$0<r\leqq1$ に対し $\pi-\delta$ から $\pi+\delta$ までの積分を $\varepsilon/2$ 以下におさえることができる．$r\to1$ のとき一様収束から $\int_0^{\pi-\delta}+\int_{\pi+\delta}^{2\pi}\log|1+re^{i\theta}|d\theta\to\int_0^{\pi-\delta}+\int_{\pi+\delta}^{2\pi}\log|1+e^{i\theta}|d\theta$ となる． $\therefore\ \int_0^{2\pi}\log|1+e^{i\theta}|d\theta=0$. これを計算して，答は $-\pi\log2$. **6.** $f(z)$ を(66)で表示し $|z|<R'<R$ で整級数展開する．$(\zeta+z)/(\zeta-z)=1+2\sum_1^\infty z^n/\zeta^n$ で，z^n の係数は $(\pi i)^{-1}\int_{|\zeta|=R}(u(\zeta)/\zeta^{n+1})d\zeta$ となる．テイラー展開の一意性からこれは R によらず，仮定から $n\geqq1$ のとき $R\to\infty$ として0であることがいえる． **7.** $f(z)$ を ∞ 中心にローラン展開し，$f_2(z)$ を主要部＋定数項，$f_1(z)$ を残りとすると，$f_2(z)$ は全平面で解析的，$f_1(z)$ は $z\to\infty$ で $f_1\to0$ となる．

仮定と前問6より $f_2(z)$ は定数となる. **8.** 略.

問題 (p. 187) **1.** 鏡像の原理（と一致の定理）から $\overline{f(\bar{z})}=f(z)$. ai を純虚数とすると, $f(ai)=\overline{f(-ai)}=-f(-ai)$ と仮定よりなる. $f(z)+f(-z)$ は全平面で解析的で虚軸上で 0 になり, 一致の定理から恒等的に 0 となる. **2.** $f_1(z)=(f(z)+\overline{f(\bar{z})})/2$, $f_2(z)=(f(z)-\overline{f(\bar{z})})/2i$. **3.** $f(1)=a$, S を上半平面を単位円に写す1次変換で $S(\infty)=1$ とし, T を単位円を上半平面に写す1次変換で $T(a)=\infty$ とする. TfS を考えると, これは鏡像の原理の仮定をみたし, 全平面の解析関数 φ に接続される. $\zeta\to\infty$ のとき $\varphi(\zeta)\to\infty$ となり, φ は多項式であることがわかる (p. 139 問2). $f=T^{-1}\varphi S^{-1}$ は有理関数. **4.** $(\zeta+z)/(\zeta-z)=1+2z/(\zeta-z)$ として, (66)に補題3を用いる. $f'(z)=(\pi i)^{-1}\int_{|\zeta|=R}u(\zeta)(\zeta-z)^{-2}d\zeta$. **5.** 実軸上 $u=0$ とおくと鏡像の原理をみたし, 全平面に調和に拡張でき, $f(z)=u(z)+iv(z)$ と全平面での解析関数をうる. $|\zeta|=R$, $|z|<R/2$ のとき, $|u(\zeta)|\leqq K|\mathrm{Im}\,\zeta|\leqq KR$, $|\zeta-z|\geqq R/2$ となり, 前問より $|f'(z)|\leqq 8K$ をうる. R は任意だから, $f'(z)$ は全平面で有界で解析的より定数となる（リュービルの定理). $f(z)$ は1次式になり, 実部 $u(z)$ は1次式 $bx+ky+c$ となる. $0\leq u\leq Ky$ より $b=c=0$, $0\leqq k\leqq K$ をうる.

第5章

問題 (p. 191～p. 192) **1.** $|z|<1$ で解析関数 $f_2(z)$ があり, $\log(1+z)=z+f_2(z)z^2$ とかける. $0<r<1$ とすると, $|z|\leqq r$ で $|f_2(z)|\leqq K$ とできる. $R>0$ を任意にとり, $|z|\leqq R$ とし, $n>R/r$ とすると, $|n\log(1+z/n)-z|=|z^2/n||f_2(z/n)|\leqq KR^2/n$ で, $n\to\infty$ のとき $\to 0$ となる. **2.** $|n^{-z}|=|\exp(-z\log n)|=\exp(-x\log n)$. 任意に $k>1$ をとると, $x\geqq k$ のとき $|n^{-z}|\leqq n^{-k}$ となり, 収束優級数でおさえられるからそこでは一様収束する. 項別微分してよく, $\zeta'(z)=-\sum n^{-z}\log n$. **3.** $2\zeta(z)/2^z=2\cdot 2^{-z}+2\cdot 4^{-z}+\cdots$ で, 絶対収束がいえているので与式をうる. $\mathrm{Re}\,z>0$ の内のコンパクトは適当な a, $\delta>0$ に対し $A=\{z;\ \mathrm{Re}\,z\geqq a,\ |\arg(z-a)|\leqq(\pi/2)-\delta\}$ に含まれる. A で一様収束をいう. $f_n(z)=(-1)^{n-1}n^{-z}$, $g_n(z)=n^{-z}$, $z=x+iy$ とおく. $|g_n(z)|\leqq g_n(x)$ である. $g_n(z)-g_{n+1}(z)$ は, e^{-zt} を t について $\log n$ から $\log(n+1)$ まで積分したものの z 倍となり, $|g_n(z)-g_{n+1}(z)|\leqq(g_n(x)-g_{n+1}(x))|z|/x$ をうる. 交項級数 $f_1(a)+f_2(a)+\cdots$ はライプニッツの定理で収束し, $r_n=f_n(a)+f_{n+1}(a)+\cdots$ とおくと, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, n_0 を $n\geqq n_0$ なら $|r_n|<\varepsilon$ となるようにとれる. $n_0\leq n<m$ に対し, $f_n(z)+\cdots+f_m(z)=\sum_n^m f_k(a)g_k(z-a)=\sum_n^m(r_k-r_{k+1})$. $g_k(z-a)=r_ng_n-\sum_n^{m-1}r_{k+1}(g_k-g_{k+1})-r_{m+1}g_m$ となり, $|f_n(z)+\cdots+f_m(z)|\leqq 2\varepsilon g_n(x-a)\cdot|z-a|/|x-a|\leqq 2\varepsilon/\cos\varphi$, $\varphi=(\pi/2)-\delta$ となる. これで一様収束はいえた. **4.** 略. **5.** 両辺ともに $\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=0}^\infty nz^{n(m+1)}$ で, これは $|z|<1$ で絶対収束.

問題 (p. 197～p. 198) **1.** $z-a=w$ とおき, $(1+z^2)^{-1}=((w+a)^2+1)^{-1}$ を部分分数にわけて w の整級数に展開する. 答. 一般項の係数が $(-1)^n\mathrm{Im}(a+i)^{n+1}/(a^2+1)^{n+1}$. $a=1$ なら $\mathrm{Im}(1+i)^{n+1}=2^{(n+1)/2}\sin 4^{-1}(n+1)\pi$. **2.** 与式を2乗し分母を払って係数を比較する. または $(1-z)^{-1/2}$ の展開を用いてもよい. $P_1=\alpha$, $P_2=(3\alpha^2-1)/2$, $P_3=(5\alpha^3-3\alpha)/$

2, $P_4=(35\alpha^4-30\alpha^2+3)/8$. **3.** $-z^2/6-z^4/180-z^6/2835+[z^8]$. **4.** 17/315. **5.** 明らかに，$c_n\geqq 0$, $c_n\geqq c_{n-1}$, $c_n=c_{n-1}+c_{n-2}\leqq 2c_{n-1}$, $\therefore\ c_n\leqq 2^{n-1}$ これから，$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$ の収束半径は 1/2 以上である．$f(z)-zf(z)-z^2f(z)=z$ となる． $\therefore\ f(z)=z/(1-z-z^2)$. $c_n=\{((1+\sqrt{5})/2)^n-((1-\sqrt{5})/2)^n\}/\sqrt{5}$.

問題 (p. 200) **1.** $R_1<|z-a|<R_2$ で $f(z)=\sum c_n(z-a)^n$ と展開できたとして，$R_1<r<R_2$ とし円周 $|z-a|=r$ の上を積分してみる．c_n が (3) 式で表せることがいえる． **2.** 199頁上半分と同様のことを，円周 $|\zeta-a|=r$ の代りに Ω のホモロジー基底 γ を用いて行う． **3.** 略． **4.** $g(z)=(e^z-1)^{-1}+2^{-1}=(e^z+1)/(2(e^z-1))$ は $g(-z)=-g(z)$ をみたし奇関数である．ゆえに，ローラン展開は奇数次の項しか現れず，$z=0$ は1位の極で留数は1である．$B_1=1/6$, $B_2=1/30$, $B_3=1/42$. **5.** $\cot z=i+2i(e^{2iz}-1)^{-1}=\dfrac{1}{z}-\sum_1^\infty\dfrac{2^{2k}B_k}{(2k)!}z^{2k-1}$, $\tan z=\cot z-2\cot 2z=\sum_1^\infty\dfrac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_k}{(2k)!}z^{2k-1}$.

問題 (p. 204) **1.** $\pi^2/6$, $\pi^4/90$, $\pi^6/945$. **2.** 部分分数展開し $\pi\cot\pi z$ の展開にもっていく．$\pi\{\cot\pi z+\omega^2\cot(\pi z/\omega)+\omega\cot(\pi z/\omega^2)\}\cdot(3z^2)^{-1}$. ω は1の3乗根． **3.** (13)式の z に $z+(1/2)$ を代入すればよい．そして $z=0$ とすれば $\pi/4$ が求まる． **4.** $\{\pi\cot\pi(z-ia)-\pi\cot\pi(z+ia)\}/2ai$.

問題 (p. 207) **1.** $n=2$ から $n=k$ までの部分積が $(k+1)/2k$. 答．1/2. **2.** $(1+z)(1+z^2)\cdots(1+z^{2^k})=(1-z^{2^k})/(1-z)$ が例えば帰納法でいえる． **3.** 任意に $R>0$ をとり，$|z|\leqq R$ とする．$n>2R$ とすると，$|z/n|<1/2$ である．$\{(1+\zeta)e^{-\zeta}-1\}\zeta^{-2}$ は原点を除去可能特異点とするから，$|\zeta|=1/2$ 上での絶対値の最大値を M とすると，$|(1+zn^{-1})e^{-z/n}-1|\leqq M|z/n|^2\leqq MR^2/n^2$ となり，定理6（とその読みかえ）が適用できる． **4.** 略． **5.** $(1+h^{2n-1}e^z)(1+h^{2n-1}e^{-z})=1+h^{2n-1}(e^z+e^{-z}+h^{2n-1})$. $|z|\leqq R$ とすると，右辺の（ ）は定数 M でおさえられ，$\sum|h|^{2n-1}$ は収束するから，$|z|\leqq R$ で絶対一様収束する．$\theta(z+2\log h)=\prod(1+h^{2n+1}e^z)(1+h^{2n-3}e^{-z})$ となり，絶対収束から積の順序をかえてよく，$(1+he^z)/(1+h^{-1}e^{-z})=he^z$ をかければ $\theta(z)$ になる．

問題 (p. 212) **1.** ヒントの級数の収束をいう．$|a_n|\leqq 2$ または $A_n=0$ の n に対し $\gamma_n=0$ とする（実は何でもよい）．他の n に対し $\varepsilon_n=2^{-n}$, $\alpha_n=A_n/g'(a_n)$ とおき，$1\leqq x\leqq|a_n|/2$ のとき $(\log x+\log\varepsilon_n-\log|\alpha_n|)/x\geqq-\gamma_n'$ となるように $0<\gamma_n'$ をとる（これは可能）．$\arg a_n=\theta_n$ とし，$\gamma_n=-\gamma_n'e^{-i\theta_n}$ とおく．任意に $R>0$ をとり，$|z|\leqq R$ で一様収束を示す．$|a_n|\leqq 2R$ という n は有限個だから $|a_n|>2R$ とする．$|z-a_n|>R$ で，$|\alpha_n e^{\gamma_n(z-a_n)}/(z-a_n)|\leqq R^{-1}|\alpha_n|\exp\{-\gamma_n'\mathrm{Re}(e^{-i\theta_n}z-|a_n|)\}\leqq R^{-1}|\alpha_n|e^{-\gamma_n'R}\leqq\varepsilon_n$ となる．$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots$ の収束からこれで一様収束がいえた． **2.** $(n+\alpha)^{-1}$ の和は発散し $(n+\alpha)^{-2}$ の和は収束するから与式の形になる．$g(z)$ を決めるために両辺を対数微分して，$\dfrac{g'}{g}=\pi\cot\pi(z+\alpha)-\sum_{-\infty}^{\infty}\cdots=\sum_{n\neq 0}\left(\dfrac{1}{z+\alpha+n}-\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{z+\alpha}-\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z+n+\alpha}-\dfrac{1}{n+\alpha}\right)=\sum_{n\neq 0}((n+\alpha)^{-1}-n^{-1})+1/\alpha=\pi\cot\pi\alpha$ をうる． g も与式の形になる． **3.** 種数 0. 零点が $(2n-1)^2\pi^2/4$, $n=1,2,\cdots$ であることからもいえるし，$\cos z=\sin 2z/2\sin z$ に (24) を用いて計算してもよい． **4.** $f(z^2)$ の種数は $2h$ か $2h+1$. **5.** $f(z)=\alpha z^m e^{\beta z}\prod(1-za_n^{-1})\cdot$

$e^{\gamma z/a_n}$ とおく．仮定より，a_n は実数，$\gamma=0$ 又は 1，$\alpha\neq 0$ である．z が実数のとき $f(z)$ が実数ということより α, β は実数になる．対数微分して，$\mathrm{Im}(f'/f)=-\mathrm{Im}z\cdot\{m|z|^{-2}+\sum|z-a_n|^{-2}\}$ となる．{ } の中は正より，$f'(z)=0$ なら z は実数．

問題 (p. 215～p. 216)　**1.** 方針だけ（別証もいろいろあると思う）．右辺を $f(z)$ とおく．(31)を用いて $(f'/f)'=(\Gamma'/\Gamma)'$ がいえる．$f(z)=e^{\alpha z+\beta}\Gamma(z)$ となるが，$f(z+1)=zf(z)$ が計算でいえ $\alpha=0$ となる．$f(1)^2=n\left\{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}^2=n\pi^{n-1}/\left\{\sin\frac{\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi\right\}=(2\pi)^{n-1}$ となる（(30)を使った）．　**2.** ルジャンドルの 2 倍公式に $z=1/3$ を代入し，(30)に $z=1/6, z=1/3$ を代入した 3 式から求まる．　**3.** $(z+n)\Gamma(z)=\pi(z+n)/\{\sin\pi z\cdot\Gamma(1-z)\}$ で，$z\to -n$ として，$(-1)^n/n!$.

問題 (p. 222)　**1.** $\log(1-e^{-2\pi\eta})^{-1}=\sum e^{-2\pi k\eta}/k$. 部分積分をして p. 205 問 5 を用いると，$\eta^{2\nu-2}e^{-2\pi k\eta}$ の 0 から ∞ までの積分は $(2\nu-2)!/(2\pi k)^{2\nu-1}$ で，それを k で割ったものの和は $B_\nu/\{\pi\cdot 2\nu(2\nu-1)\}$ となる．　**2.** 略．　**3.** $\{z;\ |z|<R,\ 0<\arg z<\pi/4\}$ の周にそって e^{iz^2} を積分し $R\to+\infty$ とする．

問題 (p. 228)　**1.** $f(z)$ を (21) で表し基本乗積の種数を h_0, $g(z)$ の次数を k とすると，$h'=\max(h_0, k)$ が f の種数である．この節の(46)の所でいう「種数」を h とする．$h_0<k=h'$ としよう．このとき，無限乗積の e のべきの多項式の次数を h' にして(46)の形にかくことはできるが，この $g(z)$ は(21)の $g(z)$ とは違ってくるしこの無限乗積はもはや基本乗積ではない(定理 8 の証明に基本乗積という言葉を使っているがこれは不正確)．h' を種数に採用して定理 8 は成立し証明は少しの修正ですむ．$h=h'$ を示すのはそのあとになると訳者は思う．略．　**2.** $|z|=r$ 上の $|g(z)|$ の最大値は $r^m\Pi(1+r|a_n|^{-1})$, 最小値は $r^m\Pi|1-r|a_n|^{-1}|$ である．これからわかる．

問題 (p. 246)　**1.** e^{-f} を考えると絶対値は 1 以下の関数族となり正規族になる．$e^{-f_n}\to\varphi$（コンパクト一様収束）とすると，φ は恒等的に 0 かまたは零点をもたない（フルヴィッツの定理)．後者の場合，$-f_n'\to\varphi'/\varphi$ となりこれから $\log\varphi$ の 1 価な枝が定まり $-f_n\to\log\varphi$ がいえる．これで実部正の解析関数族が古典的な意味で正規族になることがいえた．局所有界にするには，恒等的 0 に収束するような列 e^{-f_n} が属しえないような条件をつける必要がある．　**2.** $|z|<1$ では有界だから明らか．あとは定理 17 を使う．$|z|=1$ の点では $\rho(z^n)=n$ となり有界でない．$|z|>1$ 内にコンパクト集合 K をとると，$\rho(z^n)=2n|z|^{n-1}/(1+|z|^{2n})$ は K 上で $n=1, 2, \cdots$ として有界である．($\rho(z^n)\leq 2n/|z|^{n+1}\to 0$ (K 上一様に) からわかる)．　**3.** まず正規族とする．$k_n\to\infty$ のときコンパクト一様に $f(k_nz)\to\varphi(z)$ としよう．$r_1<r_1'<r_2'<r_2$, $K=\{r_1'\leq|z|\leq r_2'\}$ とすると，$M>0$ があり任意の n, $z\in K$ に対し $|f(k_nz)|<M$ となる．最大値の原理から $|z|\leq r_2'|k_n|$ で $|f(z)|<M$ となり $k_n\to\infty$ より全平面で有界で，$f(z)$ は定数になってしまう．(リュービルの定理)．$f(z)$ は定数でないとする．∞ が真性特異点なら，$z_n\to\infty$, $f(z_n)\to 0$ という点列がある．$z_0\in K$ をとり $z_n=k_nz_0$ とおく．$f(k_nz)$ は ∞ に一様に発散する部分列をもち矛盾である．ゆえに，∞ は極になり，$f(z)$ は多項式になる．逆は略．　**4.** 各点の近傍で正規族なら全体で正規族をいう．コンパクト集合上で一様有界（有理形のとき

は $\rho(f)$ の一様有界）をいえばよい．一様有界な近傍の有限個でおおわれるからこれは容易である．

第6章

問題 (p. 250) **1.** $\varphi(z)=\overline{f(\bar{z})}$ は条件より Ω から $|w|<1$ の上への1対1の解析関数で $\varphi(z_0)=0$ は明らかである．$f=u+iv$ とおくと，z_0 は実数より $f'(z_0)=u_x(z_0,0)+iv_x(z_0,0)>0$ で，$\varphi'(z)=u_x(x,-y)-iv_x(x,-y)$ から $\varphi'(z_0)=u_x(z_0,0)>0$ となる．一意性から $\varphi=f$. **2.** z_0 に関する対称は $z\to -z+2z_0$ で，前問と同様にして $f(z)=-f(-z+2z_0)$ となる．

問題 (p. 257) **1.** 略．z_k において隣りあう2辺が重なり Ω の内角が 2π になる． **2.** 略．$1\leqq\beta_k<3$ のとき，w_k に対応する z_k が ∞ になる．$\beta_k=1$ のとき，z_{k-1} から $z_k=\infty$ に向う半直線と $z_k=\infty$ から z_{k+1} に向う半直線は平行で反対向きになる．($\beta_k=2$ なら平行で同じ向き)． **3.** 例えば，$w_1=1, w_2=-1, \beta_1=\beta_2=1$ として，$F(w)=\int_0^w (w-1)^{-1}(w+1)^{-1}dw$ とおく．これは直接に計算により $|w|<1$ を平行な帯 $|\mathrm{Im}\, z|<\pi/4$ の上へ1対1に写すことが確かめられる．次に，$w_1=i, w_2=-i, w_3=1, \beta_1=\beta_2=1/2, \beta_3=1$ とおき，$F(w)=\sqrt{2}\int_0^w (1+w^2)^{-1/2}(1-w)^{-1}dw$ とおくと，$|w|<1$ は $\mathrm{Re}\, z>-\log(1+\sqrt{2})$, $|\mathrm{Im}\, z|<\pi/2$ に写る．($F(w)=\log(w+1+(2w^2+2)^{1/2})-\log(1-w)-\log(1+\sqrt{2}\,)$ と不定積分が求まる)． **4.** $w_n=1$ としてもよい．1次変換 $w=(\zeta-i)/(\zeta+i)$ を行うと，$dw=2id\zeta/(\zeta+i)^2$, $w_\nu=(\zeta_\nu-i)/(\zeta_\nu+i)$, $(1\leqq\nu\leqq n-1)$, $w_n=1$ を (3) に代入し，$\beta_1+\cdots+\beta_n=2$ を用いると (5) をうる．直接にやるのは略． **5.** 単位円周を閉じた折れ線に写し，頂点（角）は n 個でそこでの外角は皆 $2\pi/n$ になる．これから単純になることがいえ単位円はその多角形の内部に写る．$\omega=e^{2\pi i/n}$ とおく．$F(\omega^{k+1})-F(\omega^k)$ は単位円周上の ω^k から ω^{k+1} までの積分になり，それは $F(\omega^k)-F(\omega^{k-1})$ の ω 倍に等しい．ゆえに多角形は等辺になる． **6.** 3点 $-1, 0, \infty$ はきめて，もう1点を a^2, $(a>0)$ とする．$\xi_1=-1$, $\xi_2=0$, $\xi_3=a^2$, $\xi_4=\infty$, $\beta_1=\beta_3=1$, $\beta_2=1/2$, $\beta_4=-1/2$ として (5) より，$F_1(w)=\int_0^w w^{-1/2}(w+1)^{-1}(a^2-w)^{-1}dw$ とおく．$F_1(w)=\dfrac{1}{a(a^2+1)}\log\dfrac{a+\sqrt{w}}{a-\sqrt{w}}+\dfrac{i}{a^2+1}\log\dfrac{\sqrt{w}+i}{\sqrt{w}-i}+\dfrac{\pi}{a^2+1}$ となる．ただし，$\sqrt{w}$ は第1象限の閉包に値をもち，対数は虚部が0と π の間にあるように1価な枝をとる．$a=1$ にとれば，内角 $3\pi/2$ の頂点 $(=F_1(\infty))$ が直線 $y=x$ 上にあるようになりその頂点は $\pi(1+i)/2$ である．それを $1+i$ にするには $F(w)=2F_1(w)/\pi$ とすればよい．

問題 (p. 259) **1.** $\sqrt{1-w^2}$ などの符号は $w=a>1$ と $w=-a$ とでは異なることに注意する．$-\infty$ から $+\infty$ までの積分は0になる．$-\infty$ から $-1/k$ までの積分を A として，$-\infty$ から $+\infty$ までの積分を $-\infty, -1/k, -1, 0, 1, 1/k, +\infty$ と分割してかくと，この順に $A-iK'+(K/2)+(K/2)+iK'+A$ となりこれが0より $A=-K/2$ である．$F(\infty)$ は0から ∞ までの積分で $(K/2)+iK'-(K/2)=iK'$ となる． **2.** K, K' は k の関数だから $K(k), K'(k)$ とかく．$k'=(1-k^2)^{1/2}$ とおき $t=(1-k'^2s^2)^{-1/2}$ と変数変換する

と容易に $K'(k)=K(k')/2$ となる．$K(k)$ は k の単調増加連続関数，ゆえに $K'(k)$ は減少関数となり，$K(0)=\pi/2, K(1)=+\infty$ より，$K'(k)/K(k)$ は $0<k<1$ で $+\infty$ から 0 まで単調減少し，値が 1 になる k は存在し唯一である．$k=k'$ となるのは $k_0=1/\sqrt{2}$ のときで，そのときの (7) 式を $F_0(w)$ とすると，$K'=K/2$ である．鏡像の原理で F_0 を下半平面に延長しそれもまた F_0 とかくと，実軸上の区間 $[-1/k_0, 1/k_0]$ の補集合 D を $\pm K_0/2, (\pm K_0/2)+K_0 i$ を頂点とする正方形 Q へ等角写像する．一方，$k_0=2a/(1+a^2)$ に $a>1$ をとり，$\varphi(w_1)=2aw_1/k(w_1{}^2+a^2)$ を考えるとこれは上半平面を D の上へ等角写像し $\varphi(1)=1$ である．$F_0\circ\varphi$ は上半平面を Q へ写し，0 を 0 へ 1 を $K/2$ へ，さらに少し調べると a^2 を $(K_0/2)+K_0 i$ に写す．(7) 式で上半平面を Q へ写すものを作り F とすると，$F^{-1}\circ F_0\circ\varphi$ は 1 次変換で $0, \pm 1$ を固定するから恒等写像になり，$\therefore F=F_0\circ\varphi$ で F の k は a^{-2} になることがいえる．**3.** 略．

問題 (p. 264) **1.** E は連結としてよい (E を有限個の Ω 内の閉円板でおおい，それが連結でないなら Ω 内の曲線で結びそれを E にとりなおす)．(11)式で例えば $r=\rho/2$ とすると $u(0)/3\leqq u(z)\leqq 3u(0)$ となる．各 $z\in E$ に $B(z, 3r)\subset\Omega$ に円をとり，$B(z, r)$ で E の開被覆を作り，その有限個で $B(z_1, r_1)\cup\cdots\cup B(z_n, r_n)\supset E$ とする．$z\in B(z_i, r_i)$, $z'\in B(z_j, r_j)$, $z_0\in B(z_i, r_i)\cap B(z_j, r_j)$ とすると，$u(z)\leqq 3u(z_i)\leqq 3^2u(z_0)\leqq 3^3u(z_j)\leqq 3^4u(z')$ となる．$M=3^{2n}$ にとれば同様にして証明できる．

問題 (p. 267) **1.** $x, -x$ は調和より $|x|=\max(x, -x)$ は劣調和．**2.** $v(z)=|f(z)|^\alpha$ に対し(12)を調べる．$v(z_0)=0$ なら明らか，$v(z_0)\neq 0$ なら $f(z)$ は z_0 の近傍で $\neq 0$ で $f(z)^\alpha$ は解析的になる．r が小なら $f(z_0)^\alpha=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})^\alpha d\theta$ となり絶対値をつけて(12)をうる．$f(z)=u+iv$ とおき，$\log(1+u^2+v^2)$ のラプラシアンを計算し，コーシー・リーマンの関係を用いれば $\geqq 0$ がいえる．**3.** $\Delta v\geqq 0$ とせよ．調和関数 u に対し $V=v+\varepsilon x^2-u$ が最大値をとると，その点で $\partial^2 V/\partial x^2\leqq 0, \partial^2 V/\partial y^2\leqq 0$ でなければならず，ゆえに $\Delta V\leqq 0$ である．ところが $\Delta V=\Delta v+2\varepsilon>0$ なのでこれは不可能．$v+\varepsilon x^2$ は劣調和である．$v+\varepsilon x^2$ に対し(12)を書き，$\varepsilon\to 0$ とすれば，v は(12)をみたし劣調和である．逆．$\Delta v<0$ の所で考える．グリーン公式より，$0>\iint_{|z-z_0|\leqq r}\Delta v\,dxdy=\int_0^{2\pi}r\frac{\partial v}{\partial r}(z_0+re^{i\theta})d\theta$ となる．両辺を r でわり，r_1 から r_2 まで積分して$(r_1<r_2)$, $0>\int_0^{2\pi}v(z_0+r_2e^{i\theta})d\theta-\int_0^{2\pi}v(z_0+r_1e^{i\theta})d\theta$ をうる．これから(12)は成立しえない．**4.** $v(w)$ が 2 階連続偏導関数をもてば，$\Delta v(f(z))=|f'(z)|^2\Delta v(w)\geqq 0$ で正しい．$f'(z_0)\neq 0$ なら z_0 のある近傍が $w_0=f(z_0)$ のある近傍の上へ f により 1 対 1 に写り f^{-1} も解析的である．$u(z)$ が調和なら $u(f^{-1}(w))$ も調和で $v(f(z))-u(z)$ が最大値をみたすのと $v(w)-u(f^{-1}(w))$ がそれをみたすのと同値で，これから $v(f(z))$ は z_0 の近傍で劣調和がいえる．(劣調和関数は 2 階連続偏導関数をもつ劣調和関数で近似でき，それを使えば，$f'(z)$が零点をもつときもこの問題は正しいことがいえる.) **5.** $v_n(z)$ が領域 Ω で劣調和とし，$v(z)$ に Ω でコンパクト一様収束すれば $v(z)$ は Ω で劣調和になる．$v_n(z)$ に (12) を用い $n\to\infty$ とすればよい．**6.** α を E 上での $v(z)$ の上限（$+\infty$ でも可）とすると，コンパクトより，

$z_n \in E,\ z_n \to z_0 \in E,\ v(z_n) \to \alpha$ とできる．上半連続より $v(z_n) < v(z_0) + \varepsilon$ で $v(z_0) = \alpha$ をうる．

問題 (p. 271) **1.** 補題 1 で $u(z)$ を作る． $0<|z|<1$ で調和有界だから $z=0$ でも調和になる (p. 179 問 1). $|z|=1$ の上では $u=0$ より u は恒等的に 0 で，これは u の作り方から $v \leqq 0$ を意味する．

問題 (p. 277) **1.** 半径の比が等しいときは 1 次変換で写せる．逆の証明はいろいろある．一つは，円環から円環への等角写像に鏡像の原理をくり返し用いて全平面から全平面への解析関数に拡張しそれが 1 次変換になることを示し p. 89 問 6 に帰着させる． **2.** Ω の少し大きな領域に関し，$C = C_1 + \cdots + C_n \sim 0$ である． 4 章定理19を用いると，$\int_C \omega_i{}^* d\omega_j = \int_C \omega_j{}^* d\omega_i$ となり，ω_i は C_i 上で 1，他の C_k 上では 0 だから結論をうる．

問題 (p. 281～p. 282) **1.** ζ を $\partial\Omega$ の上を動かしたときの $\log|\zeta - z_0| - \log|\zeta - z_0'|$ の絶対値の最大値を $\delta(z_0, z_0')$ とかく． 最大値の原理で， 任意の $z \in \Omega$ に対し $|G(z, z_0) - G(z, z_0')| \leqq \delta(z_0, z_0')$ である． 同様に， $|G(z, z_0') - G(z', z_0')| \leqq \delta(z, z')$ がすべての $z_0' \in \Omega$ に対し成立する．これから， $|G(z', z_0') - G(z, z_0)| \leqq \delta(z, z') + \delta(z_0, z_0')$ となり， G は両変数に関し連続である．これから $g(z, z_0)$ に対してもいえる． **2.** $\zeta \in C_k$ のとき $p(\zeta) = k + i\lambda(\zeta)$, $q(\zeta) = \mu(\zeta) + il$ (k, l は一定) として $q \cos\alpha + ip \sin\alpha$ は虚部一定となり，$f = e^{-i\alpha}(q\cos\alpha + ip\sin\alpha)$ は各 C_k を実軸と $-\alpha$ の角をなす線分に写す．また，f は $\Omega - \{z_0\}$ で解析的で，z_0 は 1 位の極で留数は 1 である．あとは偏角の原理を用いる．

第 7 章

問題 (p. 296) **1.** 与関数を $f(z)$ とする． $\lambda_1 = \omega_1/2,\ \lambda_2 = \omega_2/2,\ \lambda_3 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ とおく．$\wp'(z)$ の零点は λ_i だけでそれは 1 位の零点である (299頁). z と $-z$ の差が周期になるのは λ_i だけである．偶関数だから，$f(z)$ の零点 (極) を a とすると $-a$ も零点(極)で，a が λ_i でなければ a と $-a$ は(周期加群に関し)同値でない． λ_i が f の零点なら偶数位数である． 実際， $f^{(2k+1)}(z)$ は奇関数の楕円関数で λ_i と $-\lambda_i$ の差は周期だから $f^{(2k+1)}(\lambda_i) = f^{(2k+1)}(-\lambda_i) = -f^{(2k+1)}(\lambda_i)$ となり $f^{(2k+1)}(\lambda_i) = 0$ となるからである．λ_i が f の極のときも同様にして偶数位数がいえる．f の零点を全部並べ (重根は重複度だけ重複させて)，それから半分を，a と $-a$ となっているときは一方だけ λ_i は重複度の半分だけとして取り出し $a_1, \cdots, a_n$ とする．極も同様にして $b_1, \cdots, b_n$ とする．そして $f(z) \prod_1^n (\wp(z) - \wp(b_i)) \cdot (\prod_1^n (\wp(z) - \wp(a_i)))^{-1}$ を考えると，楕円関数で零点も極もなくなり定数になってしまう．あと略． **2.** 与関数 $f(z)$ の零点の全体を $a_1, \cdots, a_n$, 極の全体を $b_1, \cdots, b_n$ とし，定理 6 を用いて b_n を調節し $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$ にしておく． (14)から $f(z) \cdot \Pi\sigma(z - b_k)/\Pi\sigma(z - a_k)$ は楕円関数になり零点も極もなく定数になる．

問題 (p. 298～p. 299) **1.** 略． **2.** 略． **3.** 略． **4.** 略． **5.** 略． **6.** 略． (16) の両辺を $z-u$ で割り $z \to u$ とする．$\sigma(z-u)/(z-u) \to \sigma'(0)$ となり，σ の定義(13)から $\sigma'(0) = 1$ である． **7.** 周期でない複素数 a, b を，$a \neq b,\ a \pm b$ も周期でないように任意にとる．

$\lambda\wp(a)+\mu\wp'(a)+\nu=0,\ \lambda\wp(b)+\mu\wp'(b)+\nu=0,\ (\lambda,\mu,\nu)\neq(0,0,0)$ に λ,μ,ν がとれる． このとき，$(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ である．$f(z)=\lambda\wp(z)+\mu\wp'(z)+\nu$ は楕円関数で極は周期点だけ，a,b は零点である． $\mu=0$ なら位数2となり定理6から $a+b\equiv0$ で a,b のとり方に反す．$\mu\neq0$ で3位になる． a,b のほかにもう一つ零点 c があり，また定理6から $a+b+c\equiv0$ で，$c=-(a+b)$ としてよい．$\wp,\wp'$ の偶奇に注意すると，$\lambda\wp(a+b)-\mu\wp'(a+b)+\nu=0$ となる． $z=a,\ u=b$ のとき与えられた行列式の列は線型従属になり行列式は0になる．$a=b$ のとき行列式が0は明らかである．

問題 (p. 304) **1.** 略．

第8章

問題 (p. 314) **1.** 略． **2.** p,q を互に素な自然数とし $z_r=re^{iq\pi/p}$ とおく．$(0<r<1)$．$f(z)=\sum z^{n!}$ の収束半径は1である．$f(z_r)=\sum_{1}^{p+1} z_r^{n!}+\sum_{p+2}^{\infty} r^{n!}$ となる． $r\to1$ のとき第2項の和は $+\infty$ に発散する（任意に $G>0$ をとれ．$G+1$ 項の和の方が小さく，r を1に近づければその $G+1$ 項の和が G を越えてしまう）．$f(z)$ が $|z|=1$ 上の点 z_0 を含む領域に直接接続されるとその領域内に $z_r\to z_1\ (r\to1)$ となるような z_1 がとれ矛盾．
3. 図7-4をみてほしい．実軸の各点の任意の近傍内に定理8の Ω か Ω' を2を法とした合同部分群のある元で写したものが含まれ，そこで λ は上半平面か下半平面の値を全部とる．だから λ は実軸上の点で解析的になりえない．

問題 (p. 332) **1.** 判別式を0にする z の値は $0,1,\omega,\omega^2$．ただし $\omega^3=1$．$z=0$ のときは $w=0$ で， 分岐度1の分岐点と z^2 から始まるテイラー展開をもつ分岐度0の枝とが重っている．$z=1$ のときは $w=1$ と $w=-2$ で，$w=1$ の方は分岐度1の分岐点で $w=-2$ は分岐度0で特異点でない．$z=\omega,\omega^2$ は同様で略．$z=\infty$ のときは $w=\infty$ で分岐度0，すなわち特異点でない枝が3枚重っている．

問題 (p. 337) **1.** $w_1=1+(2\cdot3)^{-1}z^3+(2\cdot3\cdot5\cdot6)^{-1}z^6+(2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot8\cdot9)^{-1}z^9+\cdots$， $w_2=z+(3\cdot4)^{-1}z^4+(3\cdot4\cdot6\cdot7)^{-1}z^7+\cdots$． **2.** $\varphi=e^{-z^2}$ とおく．$\varphi'=-2z\varphi$．ライプニッツの公式を用いると， $\varphi^{(n)}=(-2z\varphi)^{(n-1)}=-2z\varphi^{(n-1)}-2(n-1)\varphi^{(n-2)}$．$(-1)^n\varphi^{-1}$ をかけて，$H_n=2zH_{n-1}-2(n-1)H_{n-2}$ をうる．定義式を微分して，$H_n'=(-1)^n\varphi^{-1}(2z\varphi^{(n)}+\varphi^{(n+1)})=2zH_n-H_{n+1}=2zH_n-(2zH_n-2nH_{n-1})=2nH_{n-1}$ をうる．$H_n''=2nH_{n-1}'=4n(n-1)H_{n-2}$ となり，与えられた微分方程式にこれらを代入すればよい．

問題 (p. 340) **1.** $u=(z^2-1)^n$ とおく． $(z^2-1)u'=2nzu$ となり， この両辺をライプニッツの公式で $n+1$ 回微分せよ． **2.** 略．$z=0$ では特性方程式が $\alpha(\alpha-1)+1=0$，$z=-1$ では $\alpha(\alpha-1)-\alpha=0$ である． **3.** 特性方程式の根は $\alpha=0$（重根）である．答．$\sum_{0}^{\infty}(-1)^n2^{-2n}(n!)^{-2}z^{2n}$．収束半径は ∞ で整関数である．

問題 (p. 345) **1.** $(1-z)^{-\alpha}=1+\alpha z+\alpha(\alpha+1)z^2/2!+\cdots$，$\log 1/(1-z)=z+z^2/2+\cdots$ と $z=0$ を中心としてテイラー展開し，超幾何関数の展開式と比べよ． **2.** 項別微分する．$F(a,b,c,z)'=abF(a+1,b+1,c+1,z)/c$． **3.** 略． **4.** $\eta'=(w_1w_2'-w_1'w_2)/w_1^2$．これを

対数微分して $\eta''/\eta'=(w_1w_2''-w_1''w_2)/(w_1w_2'-w_1'w_2)-2w_1'/w_1$. $w_i''=pw_i'+qw_i$ を代入すると, $\eta''/\eta'=p-2w_1'/w_1$. 微分して $(\eta''/\eta')'=p'-2(w_1''w_1-w_1'^2)/w_1^2=p'-2(pw_1'w_1+qw_1^2-w_1'^2)/w_1^2$ となる. これらを代入して答をうる.

訳者あとがき

この本は Lars V. Ahlfors: *Complex Analysis, An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, 第3版の翻訳である．著者は値分布，被覆面，擬等角写像，リーマン面のモジュラスなど関数論の多くの分野で活躍し，第1回のフィールズ賞を受賞した．著者のこの本の意図は初版の序文によく述べられているのでぜひ読んでほしい．本文の所々にも，数学や教育に対する著者の考えが語られており，この本の魅力をましている．

できるだけ平易な日本語に訳すように努めたが，一方では原文をなるべく損なわないようにした．問題に略解をつけたが，訳者の力不足と紙数の不足のため不十分なものである．図をつけることができなかったので読者は図をかいて考えてほしい．誤りもあると懸念しているが，御発見の節はぜひ御教示下さるようにお願いする．解答を略したものもあるが，その中には訳者が解答を持っていないものも一部あることをおことわりしておく．

半場 哲氏は勤務のかたわら数年にわたってこの本の初版の問題を解答された．そのノートをお借りし参考にさせていただいた．半場氏による解答もこの本にいくつか含まれているが一々断わることはしなかった．深く感謝の意を表したい．初版出版の直後に，訳者はこの本にもとづく森 明先生の講義を聴講したが，新鮮で感銘深く目を見張ったものである．半場氏は森先生の講義をいっしょに聞いた友人である．森先生の御冥福をお祈りする次第である．

解答作成の参考にさせていただいた書物の主なものをあげ，厚く御礼申しあげる．省略した解答のいくつかはこれらの本の中に見つかるだろう．

〔1〕 高木貞治：解析概論（岩波）
〔2〕 田村二郎：解析函数（裳華房）
〔3〕 辻 正次・小松勇作編：大学演習函数論（裳華房）
〔4〕 辻 正次：複素変数函数論（共立）
〔5〕 遠木幸成・柴田敬一：関数論演習（学術図書）
〔6〕 能代 清：初等函数論演習（培風館）

なお，楕円関数の所の解答は，笠原：複素解析（実教出版）にもある．

1981年10月10日．

索　引

ス

セ

ソ

タ

チ, ツ

—訳者略歴—

笠原　乾吉（かさはら　けんきち）

1935年　神戸市生まれ
1957年　東京大学理学部数学科卒
現在　津田塾大学学芸学部教授
著書　複素解析（実教出版）
訳書　ヘルマンダー：多変数複素解析学入門（東京図書）
連絡先　〒187 東京都小平市津田町津田塾大学数学教室

複　素　解　析　　定価 4,300円

1982年3月1日　初版第1刷発行
1984年11月10日　〃　第2刷発行
1987年5月10日　〃　第3刷発行
1989年3月1日　〃　第4刷発行

著　者　L.V. アールフォルス
訳　者　笠　原　乾　吉
印刷所　中西印刷株式会社
製　本　株式会社　兼　文　堂

発行所　株式会社　現　代　数　学　社
京都市左京区鹿ケ谷西寺ノ前町1　〒606
振替京都 1-11144　TEL(075)751-0727

ISBN4—7687—0118—3